

Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki
Wydział Mechaniczny
Instytut Konstrukcji Maszyn



Rozprawa doktorska
Dyscyplina: inżynieria mechaniczna

**Optymalne projektowanie konstrukcji w przypadku
utrąty stateczności dynamicznej – zjawisko flutteru
dla nadkrytycznych prędkości płynu**

mgr inż. Justyna Anna Flis

Promotor: prof. dr hab. inż. Aleksander Muc

Kraków, 2020

Podziękowania

*Prezentowana rozprawa doktorska została przygotowana pod opieką Pana **prof. dr hab. inż. Aleksandra Muca**, któremu pragnę podziękować za okazaną pomoc, opiekę merytoryczną, cenne uwagi i sugestie oraz za zaangażowanie, cierpliwość i życzliwość okazane mi podczas realizacji tej rozprawy.*

*Dziękuję mojej **rodzinie i przyjaciołom** za wsparcie oraz każde dobre słowo.*

*Szczególne podziękowania składam mojemu **mężowi Krzysztofowi**, który zawsze we mnie wierzył i dodawał otuchy nawet wtedy, kiedy sama w siebie wątpiłam.*

SPIS TREŚCI

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ	7
1. WSTĘP.....	9
1.1. Wprowadzenie do tematyki pracy.....	9
1.2. Cel i zakres pracy	16
1.3. Przegląd literatury	18
2. WPROWADZENIE DO PODSTAW MECHANIKI MATERIAŁÓW KOMPOZYTOWYCH.....	21
2.1. Zależności fizyczne - prawo Hooke'a.....	21
2.1.1. Laminowane materiały kompozytowe	21
2.1.2. Porowate funkcjonalne materiały gradientowe (FGM).....	25
2.2. Wyznaczanie sztywności zastępczych	26
2.2.1. Laminowane materiały kompozytowe	26
2.2.2. Porowate funkcjonalne materiały gradientowe (FGM).....	27
2.3. Zasada Hamiltona	31
3. METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ UTRATY STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ.....	35
3.1. Wprowadzenie do problemu utraty stateczności dynamicznej	35
3.2. Układ równań podstawowych, warunki brzegowe	36
3.3. Aproksymacja rozwiązania	37
3.4. Metoda Rayleigha-Ritza	38
3.5. Metoda Bubnova-Galerkina	39
3.6. Metoda analityczna	39
3.7. Metoda elementów skończonych	43
4. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTYMALIZACJI	47
4.1. Wprowadzenie do zagadnień optymalizacji	47
4.2. Funkcje celu	50
4.2.1. Częstotliwości drgań swobodnych ($\Lambda = 0$)	51
4.2.2. Maksymalizacja wartości ciśnienia aerodynamicznego ($\Lambda > 0$)	52
4.3. Fizyczne (materiałowe) zmienne decyzyjne	53
4.3.1. Definicja zmiennych decyzyjnych dla laminowanych struktur kompozytowych.....	53
4.3.2. Optymalizacja konfiguracji laminatu.....	55
4.3.3. Funkcjonalne materiały gradientowe (FGM) i struktury nanokompozytowe (NK)	58
4.4. Geometryczne zmienne decyzyjne.....	59

4.4.1. Parametry przekroju poprzecznego - zmienna (stopniowana) grubość.....	59
4.4.2. Rodzaj struktury	59
4.5. Algorytmy optymalizacji.....	60
5. PROJEKTOWANIE PŁYT KOMPOZYTOWYCH.....	63
5.1. Relacje podstawowe	64
5.2. Częstotliwości drgań swobodnych	64
5.2.1. Wielowarstwowe płyty laminowane	64
5.2.2. Płyty wykonane z porowatych funkcjonalnych materiałów gradientowych (FGM).....	68
5.3. Maksymalizacja wartości ciśnienia aerodynamicznego	70
5.3.1. Rozwiązanie metodą analityczną.....	70
5.3.2. Optymalizacja płyt laminowanych – wpływ orientacji włókien oraz konfiguracji laminatu	74
5.3.3. Wpływ obciążeń termo-mechanicznych.....	77
5.4. Wpływ właściwości mechanicznych płyt wykonanych z porowatych funkcjonalnych materiałów gradientowych (FGM) na wartości krytycznych ciśnień aerodynamicznych.....	80
5.5. Weryfikacja obliczeń.....	82
6. OPTYMALNE PROJEKTOWANIE LAMINOWANYCH PANELI CYLINDRYCZNYCH	85
6.1. Relacje podstawowe	85
6.2. Częstotliwości drgań swobodnych	86
6.3. Maksymalizacja wartości ciśnienia aerodynamicznego	89
6.3.1. Rozwiązanie metodą analityczną.....	89
6.3.2. Rozwiązanie metodą numeryczną	90
6.3.3. Wpływ orientacji włókien oraz konfiguracji laminatu	90
6.4. Weryfikacja obliczeń.....	93
7. WNIOSKI I KIERUNKI DALSZYCH PRAC	95
7.1. Wnioski.....	95
7.2. Kierunki dalszych prac	96
Załącznik A.....	97
Załącznik B.....	99
Załącznik C.....	101
LITERATURA.....	103
Streszczenie.....	117
Summary.....	119

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$[A], [B], [D]$ – macierze sztywności laminatu

C_{ij} – elementy macierzy sztywności

R_{ij} – elementy macierzy podatności

Q_{ij} – sztywności warstwy indywidualnej laminatu w układzie lokalnym

E_1 – moduł Younga w kierunku równoległym do włókien

E_2 – moduł Younga w kierunku prostopadłym do włókien

G_{12}, G_{13}, G_{23} – moduły Kirchhoffa

H – hamiltonian

M – wektor momentów zginających

N – wektor sił błonowych

E_L/E_T – współczynnik modułu ortotropowego

F_{ij}, L_{ij} – operatory różniczkowe

U_i – składowe wektora przemieszczenia

V – objętość zajmowana przez układ

T – energia kinematyczna

U_L – całkowita energia potencjalna

$N^{\Delta T}, M^{\Delta T}$ – naprężenia wywołane wzrostem temperatury

$W^{\Delta p}$ – praca wykonana przez niekonserwatywne obciążenia aerodynamiczne

W^{ext} – praca wykonana przez zewnętrzne obciążenia termo-mechaniczne

K_x – bezwymiarowa miara obciążeń wyboczeniowych

L_x – długość płyty, paneli

L_y – szerokość płyty, paneli

R – promień paneli cylindrycznej

$P(x, z)$ – funkcja charakteryzująca rozkłady porów

P_b – właściwości materiału porowatego na dolnej powierzchni przekroju warstwy

P_t – właściwości materiału porowatego na górnej powierzchni przekroju warstwy

c_p – rodzaj porowatości

h – grubość płyty, paneli

f – funkcja celu/funkcjonał celu

s_i – zmienne decyzyjne

r_m – pierwiastki równania charakterystycznego

d_i – składowe odkształceń powierzchni środkowej

u – przemieszczenia wzdłużne

v – przemieszczenia obwodowe

w – przemieszczenia normalne

m, n – forma częstotliwości drgań swobodnych; numer fali wyboczenia

$x_{1D}, x_{2D}, x_{1A}, x_{2A}$ – funkcje płaszczyzny charakteryzującej konfigurację laminatu

$p(A_{rs})$ – tłumienie strukturalne

α – współczynnik rozszerzalności cieplnej

β – bezwymiarowe krytyczne ciśnienie aerodynamiczne

γ – kąt krzywizny paneli cylindrycznej

μ – współczynnik tłumienia aerodynamicznego

ρ – gęstość

ν_{12}, ν_{21} – współczynniki Poissona

κ – parametr zmiany krzywizny

σ_i – składowe tensora naprężenia

ε_i – składowe tensora odkształcenia

$\varepsilon_{ij}^{(m)}$ – odkształcenia błonowe

ψ_1, ψ_2 – kąty obrotu w odniesieniu do powierzchni środkowej

θ – kąt orientacji włókien w laminacie

ϑ_∞ – kąt przepływu płynu

Ω – objętość laminowanej płyty

Π – energia potencjalna ciała sprężystego, funkcjonal

λ – drgania swobodne

ω – częstotliwości drgań krytycznych

Δp – przyrost ciśnienia aerodynamicznego

Λ – ciśnienie aerodynamiczne

$\psi(z)$ – rozkład porowatości wzdłuż grubości

$\eta(x)$ – typ gradacji materiału

$\Delta(\zeta, v)$ – funkcja opisująca krzywą wartości własnej

1. WSTĘP

1.1. Wprowadzenie do tematyki pracy

Niniejsza rozprawa doktorska obejmuje przede wszystkim zagadnienie optymalizacji laminowanych materiałów kompozytowych (MK) oraz porowatych funkcjonalnych materiałów gradientowych (FGM) – prostokątnych płyt oraz paneli cylindrycznych o różnej orientacji włókien i konfiguracji laminatu oraz zmiennym stopniu porowatości. Rozważania będą dotyczyły badania utraty stateczności dynamicznej wyżej wymienionych struktur.

Stwierdzono [1] iż podejście dynamiczne jest konieczne do precyzyjnego ujęcia problemu utraty stateczności. Identyczne podejście zastosowano w encyklopedycznej definicji pojęcia stateczności [2].

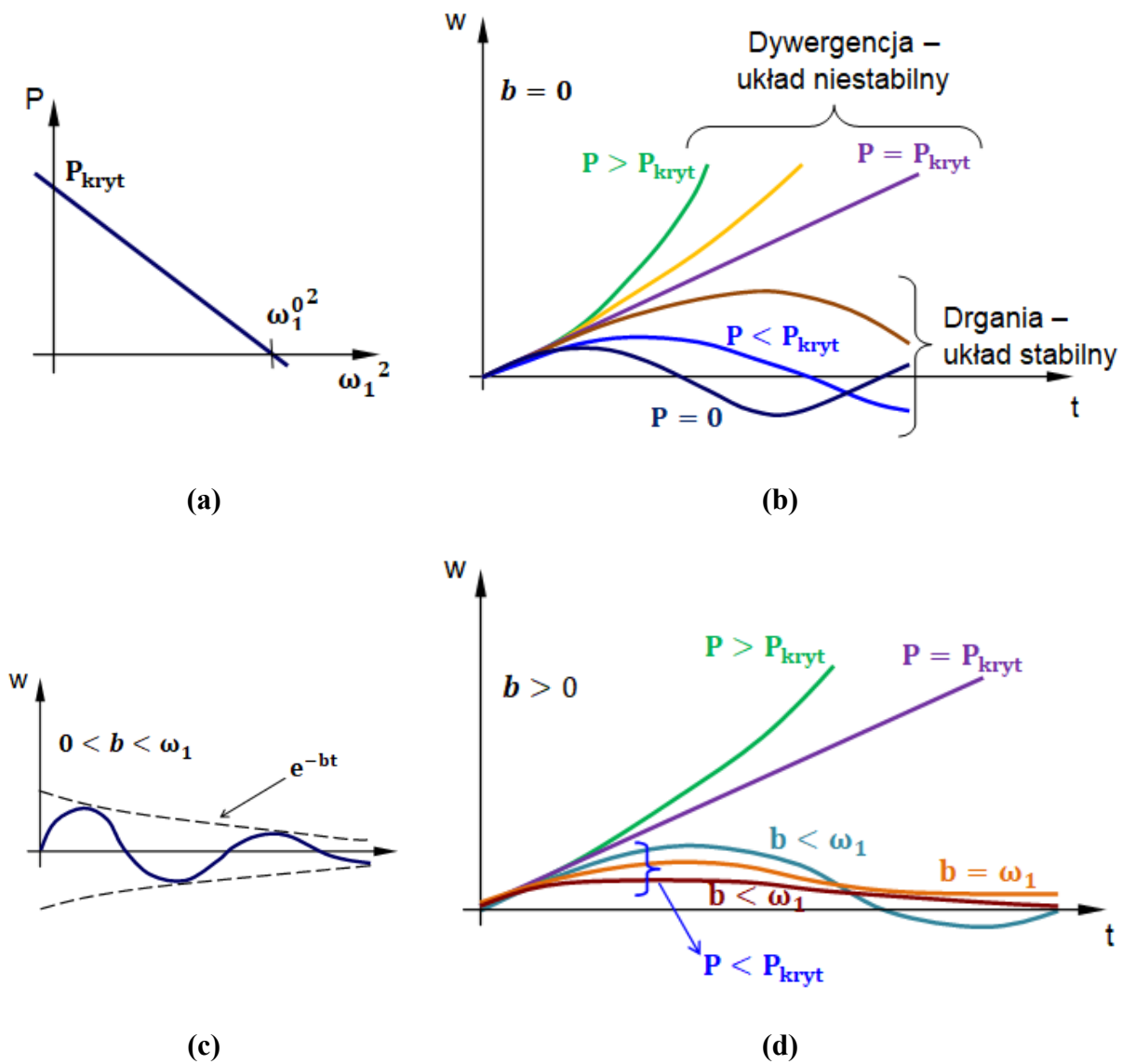
„Stateczność układów sprężystych (s.u.s.) – właściwość układów sprężystych polegająca na tym, że małe zaburzenia sił zewnętrznych lub parametrów układu powodują małe odchylenia układów od stanu równowagi (ruchu)... Pojęcie s.u.s. jest ściśle związane z ogólnym pojęciem stabilności ruchu, a w szczególności z pojęciem stabilności wg Lapunowa... Najprostszym zagadnieniem teorii s.u.s. jest zagadnienie wyoboczenia ściskanego pręta... Metoda teorii s.u.s. polegająca na rozpatrywaniu punktów rozgałęzienia i punktów granicznych zwana jest metodą statyczną... Ważną klasę zagadnień dynamicznej s.u.s. stanowią zagadnienia stabilności ruchów okresowych układów sprężystych, na które działają siły zewnętrzne o charakterze okresowym”.

W celu lepszego zrozumienia definiowanych pojęć rozważamy zagadnienie ściskania pręta siłą P . Zgodnie z zasadą d’Alemberta równanie ruchu możemy zapisać w następujący sposób:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (1.1)$$

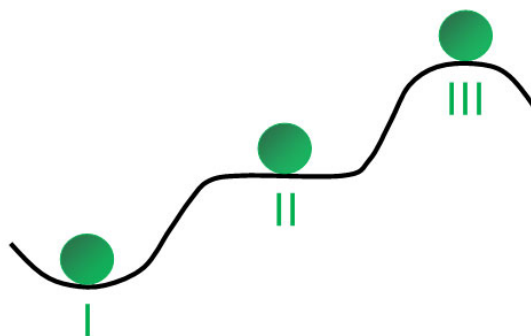
gdzie $b = \beta/2\mu$ (współczynnik tłumienia).

Wartość częstotliwości drgań krytycznych jest zależna od wartości obciążenia P . Jeżeli siła P rośnie, wartość częstotliwości drgań krytycznych ω spada (rysunek 1.1(a)). Jeżeli $P = P_{kryt}$ to ω jest równe zero. Dla $P > P_{kryt}$ ω jest liczbą zespoloną. Przypadki te przedstawione są na rysunku 1.1(b)-(d). Jakościowa zmiana typu rozwiązania następuje, gdy $P > P_{kryt}$ (rysunek 1.1(b)-(d)). Rozwiązanie jest wówczas rozwiązaniem niestabilnym. Jeżeli $P = P_{kryt}$ to przypadek ten nazywamy dywergencją, ponieważ pręt nie drga tylko może się przemieścić ($w > 0$). W przypadku, gdy $\omega = 0$ ($P = P_{kryt}$) ruch odbywa się ze stałą prędkością i oczywiście siły bezwładności są równe zero. Wyjaśnia to, dlaczego statyczna analiza stateczności (wyoboczenie bifurkacja) pozwala na otrzymanie identycznych rozwiązań jak w przypadku analizy stateczności w sensie dynamicznym.



Rys. 1.1. (a) Zależność częstotliwości od obciążenia osiowego P ; zmiany przemieszczenia w czasie przy różnych P dla: (b) $b = 0$ oraz (c), (d) $b > 0$

Rozróżnia się trzy rodzaje stanu równowagi: stały, obojętny i chwiejny – schematycznie przedstawiono je na rysunku 1.2.



Rys. 1.2. Rodzaje stanu równowagi: I – stały; II – obojętny; III – chwiejny

Równowaga stała charakteryzuje się tym, że ciało po wychyleniu z pierwotnego położenia ponownie do niego wraca. W stanie równowagi obojętnej ciało zostaje w spoczynku albo porusza się ruchem jednostajnym. W przypadku równowagi chwiejnej ciało po wychyleniu nie powraca do pierwotnego położenia tylko przechodzi do innego położenia.

Badania obejmujące stateczność prętów i układów prętowych w zakresie sprężystym prowadził już w 1759 roku Euler. Rozwój problematyki związanej z niekonserwatywnymi zagadnieniami stateczności ściskanych prętów nastąpił po 1952 roku, gdy Beck [3] jako pierwszy wykorzystał kinematyczne kryterium stateczności w analizie pręta wspornikowego obciążonego stałą siłą ściskającą o kierunku stycznym do osi pręta na swobodnym końcu. Siłę tę nazywa się siłą śledzącą (tangencjalną), a jej kierunek jest zależny od kąta ugięcia osi pręta na swobodnym końcu [4].

Znaczący udział w rozwoju problematyki stateczności prętów ściskanych siłą śledzącą posiada Życzkowski i współpracownicy. Kordas i Życzkowski [5] w roku 1963 po raz pierwszy wprowadzili uogólnienia stosowane w opisie kierunku ściskającej siły niekonserwatywnej, oddziałującej na swobodny koniec pręta. Powstało pojęcie tzw. współczynnika śledzenia η , który został zdefiniowany przez autorów jako: „*stosunek kąta zawartego między kierunkiem siły i kierunkiem nieodkształconej osi pręta do kąta zawartego między styczną do osi pręta na jego swobodnym końcu i nieodkształconej osi pręta*”.

Wprowadzony współczynnik śledzenia η zależy od stosunku sił: eulerowskiej do śledzącej (Q/F) lub jego odwrotności (F/Q). W przypadku siły podśledzającej współczynnik η opisuje zależność [4]:

$$\eta = \frac{F}{P} = \frac{F}{Q + F} = \frac{1}{1 + \frac{Q}{F}} = \frac{\frac{F}{Q}}{1 + \frac{F}{Q}} \quad (1.2)$$

Natomiast dla siły nadśledzającej współczynnik śledzenia jest określony jak poniżej [4]:

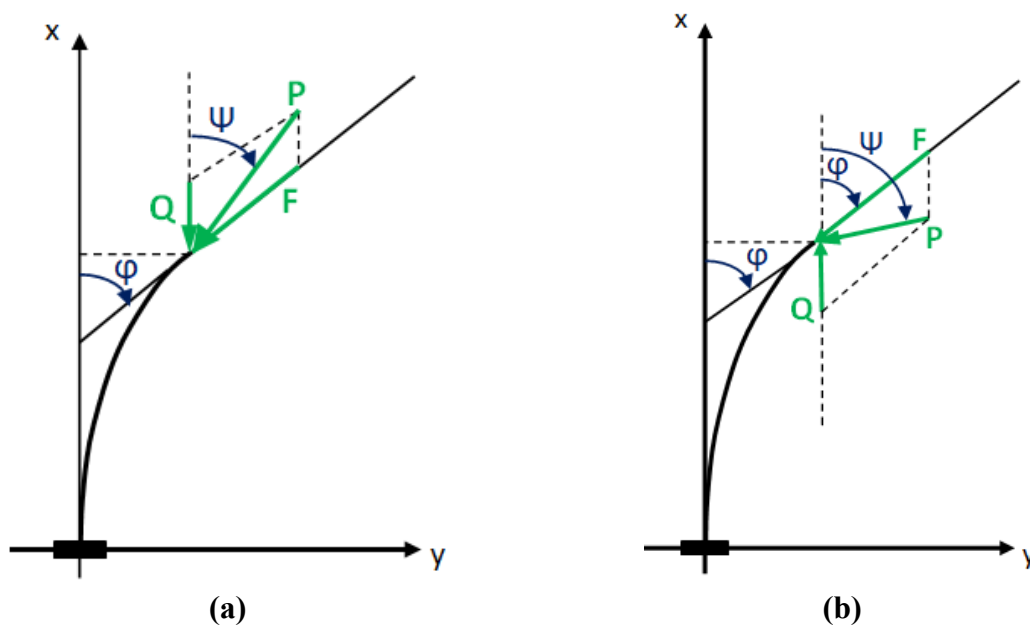
$$\eta = \frac{F}{P} = \frac{F}{F - Q} = \frac{1}{1 - \frac{Q}{F}} = \frac{\frac{F}{Q}}{\frac{F}{Q} - 1} \quad (1.3)$$

Rozróznilo i wprowadzono następującą terminologię dla działającej siły:

- Siła przeciwsledząca, gdy $\eta < 0$;
- Siła eulerowska, gdy $\eta = 0$;
- Siła podśledząca, gdy $0 < \eta < 1$ (rys. 1.3(a));
- Siła śledząca (tangencjalna), gdy $\eta = 1$;
- Siła nadśledząca, gdy $\eta > 1$ (rys. 1.3(b)).

Biorąc pod uwagę wartość współczynnika śledzenia, utrata stateczności pręta przyrzątecznego może być podzielona na:

- Wyboczenie (dywergencję) dla $\eta \leq 0$;
- Wyboczenie lub flutter dla $0 < \eta < 1$;
- Flutter dla $\eta \geq 1$.

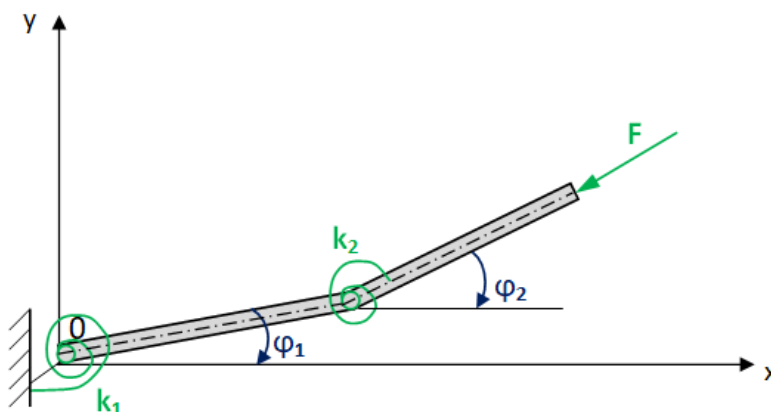


Rys. 1.3. Pręt wspornikowy z działającą siłą: (a) podśledzającą; (b) nadśledzającą

Rysunek 1.3(a) przedstawia pręt wspornikowy, który jest obciążony na swobodnym końcu siłami: ściskającą siłą śledzącą F oraz ściskającą siłą eulerowską Q . Suma tych dwóch sił P jest nachylona do nieodkształconej osi pręta pod kątem ψ , podczas gdy styczna jest nachylona do ugiętej osi pręta pod kątem φ . W drugim przypadku (rysunek 1.3(b)) pręt obciążony jest: rozciągającą siłą eulerowską Q i ściskającą siłą śledzącą F . Suma wektorowa sił P jest nachylona do nieodkształconej osi pręta pod kątem ψ .

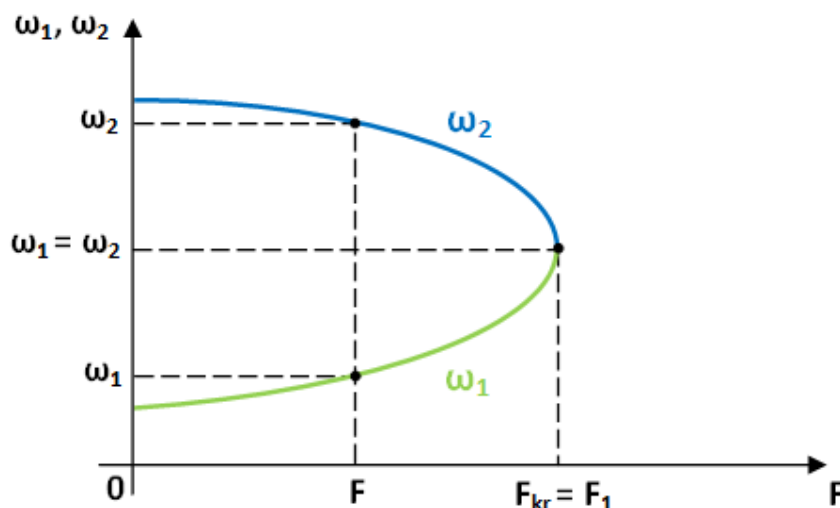
Flutter i dywergencja (wyboczenie) są głównymi zjawiskami utraty stateczności w belkach i kolumnach. W przypadku flutteru, po początkowym zaburzeniu belki, jej amplituda drgań rośnie bez ograniczeń. W literaturze, utrata stateczności belki w formie flutteru, pod działającą siłą śledzącą, nazywana jest zazwyczaj problem Becka [6].

Zjawisko dynamicznej utraty stateczności opisuje przykład kolumny Zieglera ściskanej siłą śledzącą F - rysunek 1.4. Jak pokazano na schemacie, kolumną taką nazywamy układ dwóch sztywnych cienkich prętów, które są połączone i zamocowane przegubowo oraz poddane stałej sile F . Działająca na pręt siła F charakteryzuje się tym, że zachowuje kierunek pręta. Przedstawiony układ posiada dwa stopnie swobody φ_1, φ_2 (kąty obrotu) oraz sztywności k_1, k_2 .



Rys. 1.4. Kolumna Zieglera

Wpływ wartości siły śledzącej F na częstotliwości drgań własnych przedstawia rysunek 1.5. Jeśli siła $F = 0$ to układ wykazuje drgania swobodne odpowiadające dwóm częstotliwością własnym ω_1, ω_2 , gdzie $\omega_1 \neq \omega_2$. Dla pewnej krytycznej wartości siły F zachodzi zależność $\omega_1 = \omega_2$. W przypadku, gdy siła F wzrasta, częstotliwości własne przestają istnieć, a położenie równowagi jest niestateczne. Może to skutkować powstaniem drgań samowzbudnych – zjawisko flatteru. Drgania takie mogą istnieć tylko, gdy siła śledząca F znajduje się w przedziale $F \in (F_1, F_2)$, gdzie F_1, F_2 to rzeczywiste pierwiastki dodatnie równania kwadratowego dla siły F .



Rys. 1.5. Zależność częstotliwości własnych od siły śledzącej dla kolumny Zieglera

Dla dużych wartości sił śledzących $F > F_2$, częstotliwości własne jako liczby rzeczywiste nie istnieją i obie postacie drgań narastają. Następuje niestateczność kolumny zwana dywergencją (wyboczeniem). Tak jak opisano powyżej, dywergencja występuje również w przypadku pręta ściskanego (zagadnienie Eulera).

W zagadnieniach utraty stateczności dynamicznej zasadniczą rolę odgrywa zjawisko flatteru związane z problematyką opływu konstrukcji przez płyn. Definicja tego zjawiska została podana poniżej – patrz [2].

„**Flutter** – drgania swobodne powstające w opływanych układach sprężystych. Bardzo ważne w technice lotniczej. Ważniejsze rodzaje flatteru: giętno-skrętny powierzchni nośnych; giętno-lotkowy; usterzenia pionowego i kadłuba; pokrycia; ciała smukłych o symetrii osiowej; także mostów wiszących. Rolę źródła energii pełni opływ. Do układu drgającego (np. skrzydło) energia jest przekazywana przez ciśnienie pochodzące od opływu, a sprzężeniu zwrotnemu odpowiada zależność działającego ciśnienia od ruchu układu działającego. Zamiana energii opływu na drgania jest nieodwracalna. Flutter występuje tylko po przekroczeniu prędkości krytycznej opływu. Poniżej tej prędkości każde przypadkowe zaburzenie jest tłumione”.

Szereg problemów związanych z drganiami w inżynierii aerodynamicznej powstaje dla układów sprężystych zarówno o skończonej liczbie stopni swobody jak i układów ciągłych, które są poddawane siłom powszechnie zwanymi niekonserwatywnymi. Oznacza to, że siły wyraźnie niezależne od czasu, nie mogą być reprezentowane jako gradienty niektórych funkcji energetycznych. Flutter cienkich płyt i powłok w poddźwiękowym lub naddźwiękowym przepływie płynu należy do tej grupy problemów [7]. Zjawisko to jest ważnym i znaczącym problemem napotykanym przy projektowaniu konstrukcji

samolotów [8] lub łopatek turbin (w literaturze np. Srinivasan [9]). W analizie charakterystyki flutteru uwaga skupia się głównie na omówieniu różnych problemów, które mogą mieć wpływ na zachowanie strukturalne, tj. teorie aerodynamiczne, forma warunków brzegowych, geometria strukturalna (analiza dotyczy głównie struktur 2D), właściwości materiału i skutki sprzężenia aeroelastycznego.

Reakcje aeroelastyczne są mierzone dla różnych parametrów mechanicznych i aerodynamicznych, takich jak: zwyczajne i połączone kształty formy drgań (*ang. mode*), zredukowanej częstotliwości, liczby Macha ($M =$ prędkość przepływu do prędkości dźwięku), kąta padania. W zależności od prędkości przepływu do oceny charakterystyki flutteru służą różne metody i teorie.

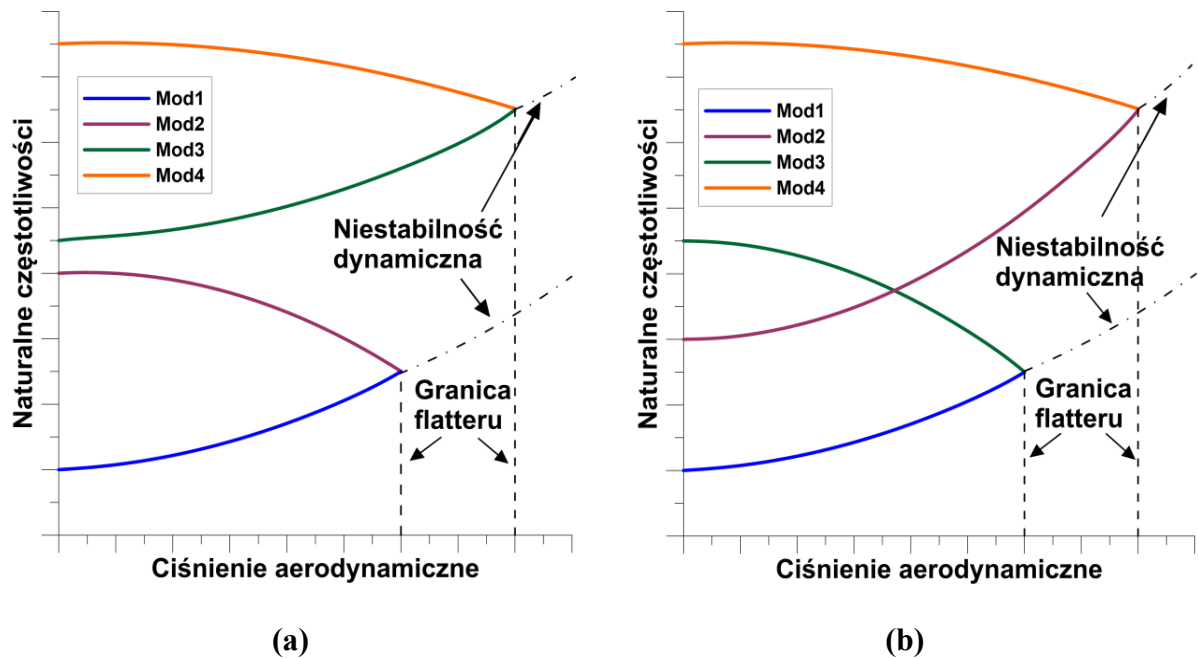
Dla prędkości poddźwiękowych ($M < 0.8$) można zastosować metodę Doublet-Lattice Method (DLM), a w przypadku prędkości naddźwiękowych ($M > 1.5$) teorię typu „piston”. W analizie naddźwiękowego flutteru, teorie aerodynamiczne (liniowa lub nieliniowa teoria typu „piston”, liniowa teoria potencjału czy równania Naviera-Stokesa) są silnie powiązane z wykorzystaniem liniowych lub nieliniowych teorii strukturalnych i możliwego zakresu liczby Macha – odniesienie w literaturze [10]. W tabeli 1.1 podsumowano możliwą klasyfikację modeli wykorzystywanych w analizie charakterystyki flutteru.

Flutter może występować na powierzchniach stałych, takich jak skrzydło lub stabilizator, a także na powierzchniach kontrolnych, takich jak np. lotka lub dźwigar. Zjawisko flutteru jest bardzo niebezpieczne, można się o tym przekonać m.in. na udostępnionym przez kanał AIRBOYD materiale przygotowanym przez NASA [11].

Tabela 1.1. Klasyfikacja modeli w analizie charakterystyki flutteru

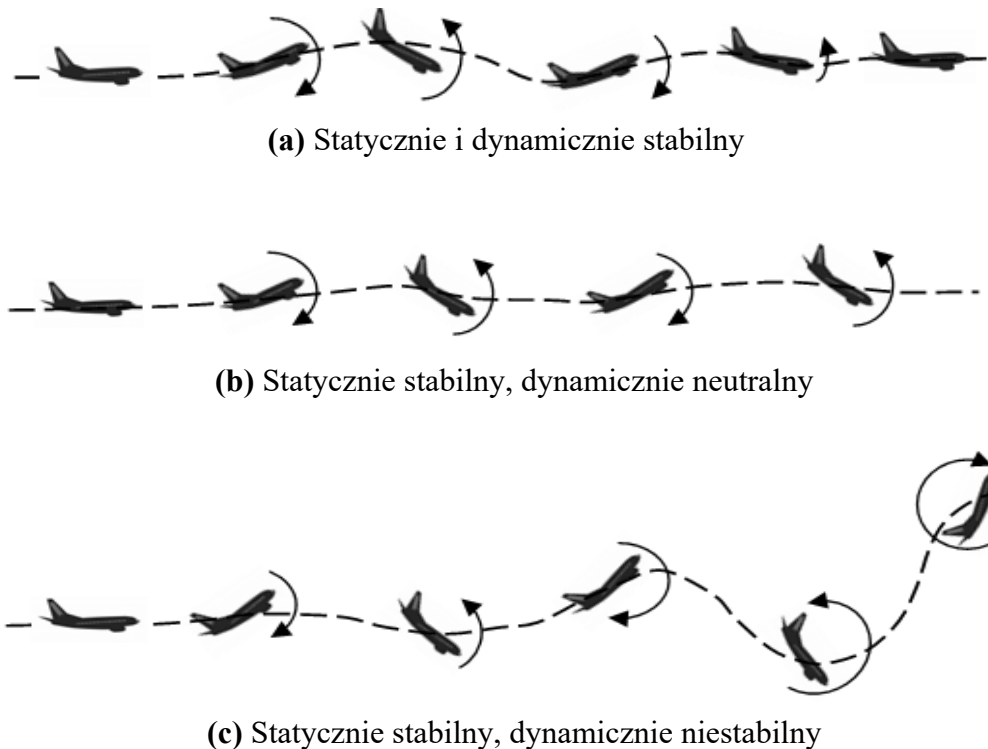
Lp.	Teoria Strukturalna	Teoria aerodynamiczna	Liczba Macha M
1	Liniowa	Liniowa teoria typu „piston”	$\sqrt{2} \leq M \leq 5$
2	Liniowa	Liniowa teoria potencjału	$1 \leq M \leq 5$
3	Nieliniowa	Liniowa teoria typu „piston”	$\sqrt{2} \leq M \leq 5$
4	Nieliniowa	Liniowa teoria potencjału	$1 \leq M \leq 5$
5	Nieliniowa	Nieliniowa teoria typu „piston”	$M > 5$
6	Nieliniowa	Równania Naviera-Stokesa	Transoniczna, supersoniczna, hipersoniczna

Zazwyczaj, zjawisko flutteru jest charakteryzowane przez wykresy zmian częstotliwości naturalnych w odniesieniu do ciśnienia aerodynamicznego – rysunek 1.6. Sąsiadujące formy drgań zbliżają się do siebie przy wartości krytycznego ciśnienia aerodynamicznego odpowiadającego utracie stabilności. Wartości krytycznych ciśnień aerodynamicznych są inne dla różnych form drgań. Jak pokazano na rysunku 1.6, właściwości mechaniczne (materiałowe) mogą drastycznie zmienić zarówno zachowanie przed-, jak i po-flutterowe – formy koalescencji częstotliwości mogą być zupełnie inne dla struktur izotropowych i anizotropowych.



Rys. 1.6. Odchylenia częstotliwości naturalnych do ciśnienia aerodynamicznego:
 (a) płyty izotropowe; (b) wielowarstwowe laminowane płyty

Stateczność dynamiczna pojazdu powietrznego odnosi się do sposobu zachowania się tego pojazdu w czasie po wystąpieniu zakłócenia w wyniku stałego, nieoscylującego lotu. Jeżeli pojazd powietrzny jest statycznie stabilny, podczas lotu może podlegać trzem typom ruchu oscylacyjnego - schematycznie przedstawionym na rysunku 1.7.



Rys. 1.7. Typy ruchu oscylacyjnego opisujące stateczność dynamiczną

W przypadku braku równowagi, samolot próbuje utrzymać swoją pozycję i osiąga równowagę przez serię zanikających oscylacji – samolot jest uważany za dynamicznie stabilny (rysunek 1.7(a)). Jeśli samolot kontynuuje ruch oscylacyjny bez zaniku wielkości, wówczas mówi się, że jest on dynamicznie neutralny (rysunek 1.7(b)). Jeśli wielkość ruchu oscylacyjnego wzrośnie, a orientacja pojazdu powietrznego zacznie się gwałtownie zmieniać, wówczas uważa się, że pojazd powietrzny jest dynamicznie niestabilny (rysunek 1.7(c)). Ogólnie rzecz biorąc, stabilność dynamiczna opisuje formę ruchu pojazdu powietrznego w stabilności statycznej jaki przechodzi, gdy próbuje on powrócić do swojego pierwotnego położenia.

1.2. Cel i zakres pracy

Przedmiotem rozważań przedstawionych w niniejszej rozprawie jest:

1. Zagadnienie optymalizacji wielowarstwowych struktur kompozytowych w warunkach utraty stateczności dynamicznej w przypadku ruchu konstrukcji w otaczającym ją płynie dla prędkości nadkrytycznych, tzn. gdy $M > 1.5$;
2. Analiza charakterystyk częstotliwość-ciśnienie aerodynamiczne dla struktur wykonanych z porowatych funkcjonalnych materiałów gradientowych (FGM).

Analiza dotyczy dwóch rodzajów konstrukcji:

- Płyt prostokątnych;
- Paneli cylindrycznych.

Generalnie, zagadnienie optymalizacji sprowadza się do definicji następujących elementów:

- Funkcji celu;
- Zmiennych decyzyjnych;
- Więzów w postaci równościowej lub nierównościowej;
- Algorytmu optymalizacji.

Pełne określenie powyższych elementów przedstawiono w rozdziale 4.

Obecnie, bez stosowania formalizmu matematycznego, problem optymalizacji można określić w następujący sposób:

Poszukiwanie maksimum ciśnienia aerodynamicznego odpowiadającego utracie stateczności dynamicznej wymienionych powyżej konstrukcji oraz zdefiniowanie najbardziej korzystnych (z punktu widzenia prostoty rozwiązań zagadnień optymalizacji) postaci zmiennych decyzyjnych.

Zagadnienie projektowania konstrukcji wykonanych z porowatych FGM sprowadzono do zadań optymalizacji parametrycznej, tzn.:

Badanie optymalnego rozkładu porów konstrukcji.

Rozwiązanie powyższych problemów zostało przeprowadzone przy zastosowaniu dwóch pakietów numerycznych:

- Mathematica wersja 9 i 12;
- MES NISA II.

Pakiet symboliczny Mathematica zastosowano w celu analitycznego rozwiązania problemu dla specyficznych warunków brzegowych, a metoda elementów skończonych (MES) została wykorzystana do przeprowadzenia analizy konstrukcji z dowolnymi warunkami brzegowymi. Obliczenia analityczne zostały dokonane dla konstrukcji opisywanych przy zastosowaniu hipotezy Love'a-Kirchhoffa (L-K). W obliczeniach numerycznych MES stosowano elementy skończone powłokowe typu NKTP 32 posiadające możliwość analizy efektów poprzecznego ścinania w ujęciu teorii poprzecznego ścinania pierwszego rzędu (FSDT).

Szereg informacji wyjaśniających szczegółowo problematykę wyznaczania charakterystyk flatteru przedstawiono w rozdziale 3, a omówienie zagadnień optymalizacji zawarto w rozdziale 4 rozprawy.

Wyniki analizy przeprowadzonej w niniejszej rozprawie zostały opublikowane w zagranicznych czasopismach naukowych. Zebrane wyniki pozwoliły na opracowanie poniższych artykułów:

- Muc A., Flis J., Closed form solutions – Analysis and optimal design of supersonic composite laminated flat plates considering mechanical and thermal effects, *Composite Structures*, 2019, 230, 111491;
- Muc A., Flis J., Augustyn M., Optimal design plated/shell structures under flutter constraints – A literature review, *Materials*, 2019, 12(24), 4215;
- Muc A., Flis J., Free vibrations and supersonic flutter of multilayered laminated cylindrical panels, *Composite Structures*, 2020, 246, 112400;
- Flis J., Augustyn M., Muc A., Divergence and flutter of multilayered laminated structures, *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, zaakceptowane;
- Flis J., Muc A., Analytical solutions of supersonic flutter problems for laminated multilayered composite plates and cylindrical shells, *Vibrations in Physical Systems*, 2020, wysłane do redakcji;
- Muc A., Flis J., Free vibrations and flutter characteristics of rectangular functionally graded porous plates, *Composite Structures*, 2020, zaakceptowane.

W poszczególnych rozdziałach rozprawy opisano najważniejsze zagadnienia związane z optymalnym projektowaniem konstrukcji kompozytowych. Rozdział 1 przedstawia wprowadzenie do tematyki pracy, cel pracy oraz przegląd literatury z zakresu optymalnego projektowania i problemów z utratą stateczności dynamicznej struktur kompozytowych. W rozdziale 2 omówiono podstawy mechaniki materiałów kompozytowych (MK oraz FGM), w tym prawo Hooke'a, hipotezę Love'a-Kirchhoffa (L-K) czy wyznaczanie sztywności zastępczych laminatu. Przedstawione zostały również właściwości porowatych materiałów funkcjonalnych (FGM). Kolejny rozdział dotyczy zagadnienia utraty stateczności dynamicznej. Omówiono w nim istotę analizy flatteru oraz wybrane metody analityczne i numeryczne wykorzystywane w analizie. W rozdziale 4 uwaga skupiła się na problemie optymalizacji. Szczegółowo opisano funkcje celu i zmienne decyzyjne (fizyczne i geometryczne) oraz podano szereg odniesień do literatury. Ponadto, przedstawiono zagadnienie algorytmu optymalizacji. Kolejne dwa rozdziały dotyczą optymalnego projektowania i przeprowadzonej analizy dla płyt kompozytowych (rozdział 5) oraz paneli cylindrycznych (rozdział 6). W tych rozdziałach przedstawiono wyniki przeprowadzonej analizy zarówno metodą analityczną jak i numeryczną (w formie graficznej i tabelarycznej). W ostatnim rozdziale podsumowano całą pracę, sformułowano wnioski oraz zaproponowano kierunki dalszych badań w zakresie optymalizacji konstrukcji kompozytowych w przypadku utraty stateczności dynamicznej.

1.3. Przegląd literatury

Optymalne projektowanie charakterystyki flatteru dla struktur płytowych/powłokowych jest istotnym i interesującym problemem inżynierskim, który został słabo zbadany w ostatnich dziesięcioleciach. Przykładowo, w przeglądzie dotyczącym optymalnego projektowania struktur kompozytowych autorstwa Sonmez [12], przedstawiono jedynie 5 z 1007 prac dotyczących prędkości flatteru oraz 7 z 1007 prac na temat wydajności aerodynamicznej. Z kolei Alijani i Amabili [13] omówili 6 z 314 prac dotyczących analizy związanej z charakterystyką flatteru.

Zagadnienie flatteru jest złożonym zjawiskiem aerodynamicznym, które dotyczy nie tylko opisu dynamicznego zachowania się struktur, ale przede wszystkim charakterystyki interakcji cieciz – struktura, powstającej podczas przepływu cieciz nad powierzchnią danej konstrukcji.

Pierwsze badania teoretyczne i obserwacje opierały się głównie na analizie belek modelujących płaskie płyty dwuwymiarowe o nieskończonej szerokości i posiadających dwie proste podpory wzdłuż krawędzi o skończonej długości [14-16]. Li, Song [17] badali dla paneli wpływ różnych warunków brzegowych przy użyciu podobnego modelu belki jak w powyższych pracach. Bolotin [7] rozpatrywał izotropowe prostokątne płyty o skończonych wymiarach. Do modelowania charakterystyk flatteru dla płaskich płyt o dowolnych warunkach brzegowych zastosowano różne typy funkcji aproksymacyjnych w postaci: szeregu Fouriera (Sawyer [18], Bohon [19] – metoda Bubnova-Galerkina), szeregów mocy (Li, Narita [20]) i elementów skończonych – prace [21-23]. Dla paneli cylindrycznych i powłok cylindrycznych zostało wprowadzone podobne podejście do tego wspomnianego powyżej [7, 24-28]. Obecnie, badaniom poddawane są zmienne warunki brzegowe oraz problemy z aktywną kontrolą flatteru – odnośniki [29, 30]. W tabeli 1.2 podsumowano możliwe warianty analizy dla zjawiska flatteru.

Tabela 1.2. Warianty analizy zagadnień flatteru

Struktura	Przepływ - ciśnienie aerodynamiczne - prędkość lotu, kąt przepływu	Materiał	Relacje kinematyczne	Metody analizy
1. Belki	1. $M < 1.5$	1. Izotropowy	1. Love'a- Kirchhoffa (L-K)	1. Analityczne: -przemieszczenie normalne
2. Prostokątne płyty	2. $M > 1.5$	2. Wielowarstwowe laminowane	2. Teoria poprzecznego ścianania pierwszego rzędu (FSDT)	- funkcje naprężenia (równania kompatybilności) *Bubnov – Galerkin (B-G)
3. Płytkie cylindryczne powłoki	naddźwiękowy	kompozyty (MK)	3. Podejście liniowe	*Rayleigh –Ritz (R-R)
4. Zamknięte cylindryczne powłoki		3. Funkcjonalne materiały gradientowe (FGM)	4. Podejście nieliniowe	2. Numeryczne: - Indywidualne - Ansys - NISA II
5. Ścięte stożkowe powłoki		4. Nanostruktury		
6. Ścięte sferyczne powłoki				

Należy zauważyć, że bardzo ograniczona liczba prac dotyczy analizy optymalizacji związanej z flutterem. Ogólnie rzecz biorąc, autorzy prac [21, 22, 31-34] wykazali, że orientacja głównych osi materiału warstwowego i konfiguracja laminatu mają wyraźny wpływ na charakterystykę flutteru dla kompozytowych płyt prostokątnych. Kameyama, Fukunaga [35] przeanalizowali charakterystykę dywergencji i flutteru wykorzystując parametry laminowania reprezentujące konfigurację laminatu. Li, Narita [20] wprowadzili podejście optymalizacji warstwowej, aby znaleźć optymalne kąty włókien dla płyt laminowanych poddanych ciśnieniu aerodynamicznemu i obciążeniu termicznemu.

Ogólny opis i podejście do analizy flutteru nie mogą być zmienione w stosunku do przeszłości – prace historyczne [7, 15, 16, 18, 24, 26, 27]. Fundamentalny rozwój zaobserwowano jedynie w obszarze stosowanych metod liczbowych. Pierwsze przeglądy, dotyczące w szczególności badań parametrycznych flutteru dla płyt/powłok zostały przedstawione przez Fung [36], Dowell [37]. Z kolei Qiaozhen Sun, Yufeng Xing [10] przedstawili i omówili 63 odniesienia z literatury dotyczące różnych aspektów związanych z analizą flutteru. Ostatni, bardziej kompleksowy przegląd badań w zakresie zachowania się flutteru dla struktur kompozytowych można znaleźć u Pettit [38] oraz Kouchakzadeh i pozostali [32].

Bardzo szeroki przegląd literatury dotyczący zagadnień optymalizacji konstrukcji kompozytowych w warunkach utraty stateczności dynamicznej przedstawiono w pracy Muc, Flis, Augustyn [39]. W cytowanym artykule przeglądowym omówiono 276 prac z tej dziedziny.

Poszczególne kwestie nawiązujące bezpośrednio do zadań rozwiązywanych w rozprawie doktorskiej są szerzej omówione w rozdziale 4.

2. WPROWADZENIE DO PODSTAW MECHANIKI MATERIAŁÓW KOMPOZYTOWYCH

Właściwości mechaniczne materiałów kompozytowych (MK oraz FGM) wynikają z ich anizotropii, dlatego też w analizie teoretycznej oraz modelowaniu struktur wykonanych z tych materiałów, stosowanych jest wiele teorii, hipotez oraz przybliżeń. Główną treść zawartą w niniejszym rozdziale dotyczy analizy laminowanych materiałów kompozytowych (MK). Problematyka opisu własności mechanicznych porowatych funkcjonalnych materiałów gradientowych (FGM) znajduje się w rozdziale 2.2.2.

2.1. Zależności fizyczne - prawo Hooke'a

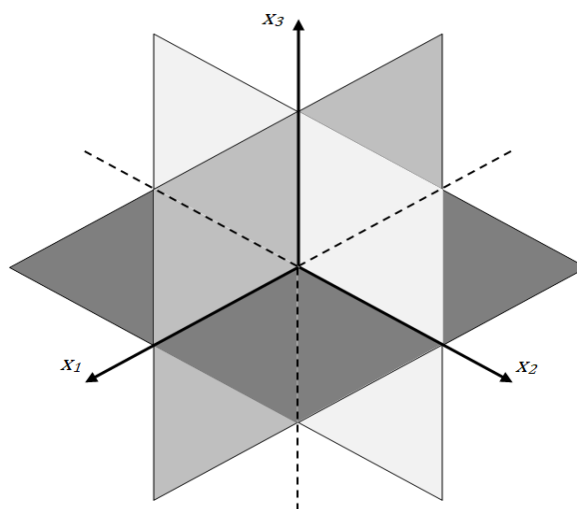
2.1.1. Laminowane materiały kompozytowe

Opis ciała anizotropowego wymaga znajomości 36 stałych materiałowych, co jest kłopotliwe w zastosowaniach inżynierskich z uwagi na konieczność eksperymentalnego wyznaczania wartości tych parametrów. Takie podejście wiąże się ze skomplikowanymi obliczeniami, dużymi kosztami oraz czasochłonnością procesu. Z tego powodu, w opisie matematycznym, dąży się do redukcji ilości stałych materiałowych.

Stałe materiałowe mogą być zdefiniowane na poziomie warstwy indywidualnej lub laminatu. Dla każdego z tych przypadków przyjmuje się jako podstawowe założenie [40]:

Laminat (warstwa indywidualna) traktowany jest jako kontinuum materiałowe, tzn. brak jest nieciągłości na granicach faz, warstw indywidualnych, nie występują pęcherze powietrza itp.

Powyższe założenie determinuje automatycznie opis MK jedynie na poziomie makromechaniki. Liczba stałych materiałowych zależy bezpośrednio od przyjętych założeń upraszczających.



Rys. 2.1. Ortogonalne płaszczyzny symetrii w układzie (x_1, x_2, x_3)

Przy opisie właściwości mechanicznych MK w modelach teoretycznych oraz numerycznych (MES) zastosowano model ciała ortotropowego [40]. Materiałem ortotropowym nazywamy taki materiał, który w układzie (x_1, x_2, x_3) posiada trzy ortogonalne płaszczyzny symetrii tak jak przedstawiono to na rysunku 2.1.

Prawo Hooke'a dla układu lokalnego (materialnego) można zapisać w następującej postaci (przy założeniu, że nie występuje deformacja w kierunku normalnym do powierzchni środkowej płyty/powłoki):

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.1)$$

gdzie:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

albo w postaci odwrotnej:

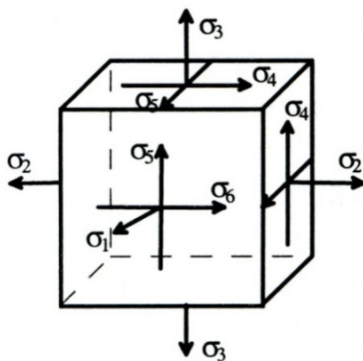
$$\varepsilon_j = R_{ij} \sigma_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.2)$$

gdzie:

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{31} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} & 0 & 0 & 0 \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{66} \end{pmatrix}$$

przy czym σ_i – to składowe tensora naprężenia, ε_j – to składowe tensora odkształcenia, C_{ij} – są elementami macierzy sztywności, a R_{ij} – to elementy macierzy podatności.

W równaniach (2.1) oraz (2.2) wprowadzono uproszczoną notację zaproponowaną przez Kelvina-Voigta przedstawioną w postaci rysunku 2.2.



$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, & \sigma_4 &= \sigma_{23}, \\ \sigma_2 &= \sigma_{22}, & \sigma_5 &= \sigma_{13}, \\ \sigma_3 &= \sigma_{33}, & \sigma_6 &= \sigma_{12}, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, & \varepsilon_4 &= 2\varepsilon_{23}, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22}, & \varepsilon_5 &= 2\varepsilon_{13}, \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33}, & \varepsilon_6 &= 2\varepsilon_{12}, \end{aligned}$$

Rys. 2.2. Składowe tensora naprężeń i odkształceń w notacji Kelvina-Voigta [40]

W przypadku wielu materiałów, w tym również MK, analizę naprężeń przeprowadza się w dwóch wymiarach (model 2D), co wiąże się z pewnym rodzajem uproszczeniem. Tak jak wspomniano wcześniej, w analizie teoretycznej nie rozważa się efektów poprzecznego ścinania co skutkuje uproszczeniem macierzy sztywności (2.1) oraz (2.5). Wyeliminowanie naprężeń poprzecznego ścinania można zapisać w postaci:

$$\sigma_{33} = 0 \quad (2.3)$$

Wartość odkształceń ε_3 dla płaskiego stanu naprężeń określamy z warunku $\varepsilon_{33}=0$, czyli:

$$\varepsilon_3 = -(C_{31}\varepsilon_1 + C_{32}\varepsilon_2 + C_{36}\varepsilon_6) / C_{33} \quad (2.4)$$

co powoduje, że dla warstwy indywidualnej macierz sztywności przyjmuje poniższą postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}, \quad Q_{ij} = C_{ij} - C_{i3} C_{j3} / C_{33} \quad (2.5)$$

gdzie Q_{ij} ($i, j=1,2,4,5,6$) to sztywności zredukowane do płaszczyzny warstwy indywidualnej laminatu w układzie lokalnym (materialnym).

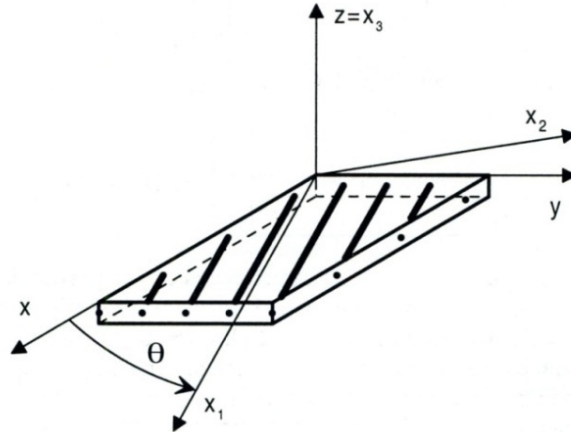
W celu rozróżnienia warstw laminatu często stosuje się symbol $Q_{ij}^{(k)}$ odnoszący się do sztywności k warstwy. Wielkości te definiuje się za pomocą poniższych wzorów:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.6)$$

gdzie E_1 – to moduł Younga w kierunku równoległym do włókien, E_2 – to moduł Younga w kierunku prostopadłym do włókien, ν_{12}, ν_{21} – to współczynniki Poissona, a G_{12}, G_{13}, G_{23} – to moduły Kirchhoffa oraz:

$$\begin{aligned} \nu_{12}E_2 &= \nu_{21}E_1 \\ \nu_{21} &= \frac{\nu_{12}E_2}{E_1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Relacje w równaniach (2.1) – (2.7) przedstawiono dla lokalnego układu współrzędnych. W celu wykonania transformacji do globalnego układu współrzędnych należy dokonać obrotu układu lokalnego o kąt θ , co pokazano schematycznie na rysunku 2.3.



Rys. 2.3. Lokalny oraz globalny układ współrzędnych [40]

Elementy macierzy sztywności (2.5) przyjmują poniższą postać ($\bar{Q}_{ij} = \bar{Q}_{ji}$ z uwagi na symetryczność macierzy sztywności):

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta, \\
 \bar{Q}_{12} &= Q_{12} \cos^4 \theta + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} \sin^4 \theta, \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{11} \sin^4 \theta, \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} - 4Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\
 \bar{Q}_{66} &= Q_{66} \cos^4 \theta + 2(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} \sin^4 \theta \\
 \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta, \\
 \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta, \\
 \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Po wprowadzeniu parametrów U :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\
 U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}), \\
 U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}), \\
 U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}), \\
 U_5 &= \frac{1}{2}(U_1 - U_4), \\
 U_6 &= \frac{1}{2}(Q_{55} - Q_{44}), \\
 U_7 &= \frac{1}{2}(Q_{44} + Q_{55}),
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta, \\
 \bar{Q}_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta, \\
 \bar{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta, \\
 \bar{Q}_{16} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta, \\
 \bar{Q}_{26} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta, \\
 \bar{Q}_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta \\
 \bar{Q}_{44} &= U_7 - U_6 \cos 2\theta, \\
 \bar{Q}_{45} &= U_6 \sin 2\theta, \\
 \bar{Q}_{55} &= U_7 + U_6 \cos 2\theta.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Podsumowując, analiza teoretyczna, dotyczy wyłącznie cienkich struktur dwuwymiarowych (2D). Oznacza to, że orientacja włókien danej warstwy zależy wyłącznie od dwóch zmiennych x i y , które definiują powierzchnię środkową płyty/powłoki. Nie jest rozpatrywana zmienna z .

2.1.2. Porowate funkcjonalne materiały gradientowe (FGM)

Prawo Hooke'a dla porowatych funkcjonalnych materiałów gradientowych (FGM) zapisywane jest w postaci analogicznej jak dla ciała anizotropowego i przyjmuje ono postać:

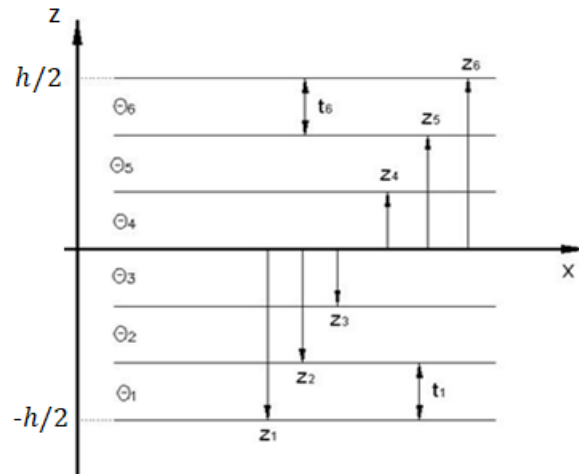
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

W dalszych rozważaniach (patrz punkt 2.2.2) przyjęto, że moduł Younga E jest funkcją położenia punktu materialnego struktury (x, y, z) zaś współczynnik Poissona ν przyjmujemy jako stały.

2.2. Wyznaczanie sztywności zastępczych

2.2.1. Laminowane materiały kompozytowe

Laminat może być zbudowany z N warstw indywidualnych, przy czym każda warstwa może posiadać dowolną orientację czy też grubość w globalnym układzie współrzędnych $t_k = z_k - z_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) – rysunek 2.4.



Rys. 2.4. Przekrój poprzeczny laminatu wielowarstwowego [41]

W globalnym układzie współrzędnych zdefiniujemy poszczególne składowe macierze sztywności **A**, **B** i **D** w poniższy sposób:

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} t_k, \quad (2.12)$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad (2.13)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3), \quad (2.14)$$

gdzie k – oznacza numer indywidualnej warstwy, a $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ przedstawiono wzorami (2.10).

Dla płyt oraz powłok zależność (2.5) można scałkować wzdłuż zmiennej z i przyjmuje ona następującą postać:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(m)} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{M} = \int_V z \boldsymbol{\sigma} dz, \quad \mathbf{N} = \int_V \boldsymbol{\sigma} dz,$$

gdzie \mathbf{N} – jest wektorem sił błonowych, \mathbf{M} – jest wektorem momentów zginających, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} – to macierze sztywności laminatu, $\varepsilon_{ij}^{(m)}$ – oznacza odkształcenia błonowe, κ – to parametry zmiany krzywizny.

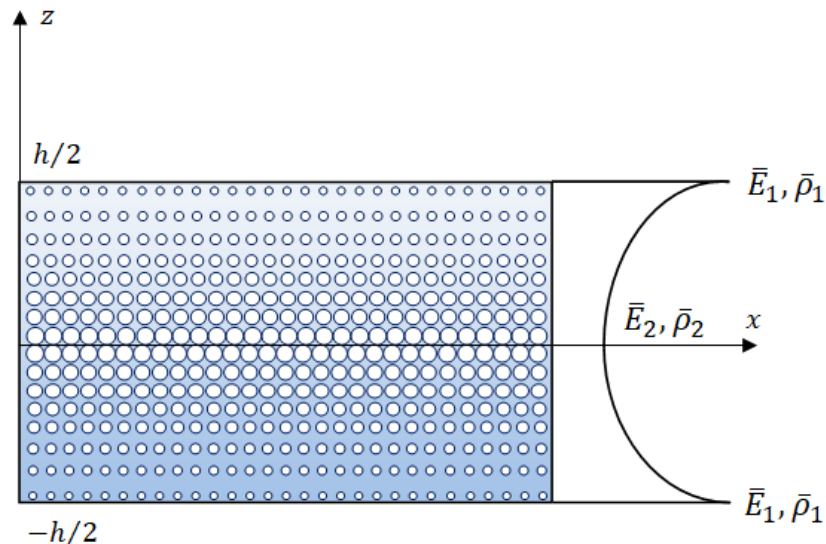
W macierzach sztywności \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{D} rozważa się różną orientację włókien każdej z warstw laminatu.

2.2.2. Porowate funkcjonalne materiały gradientowe (FGM)

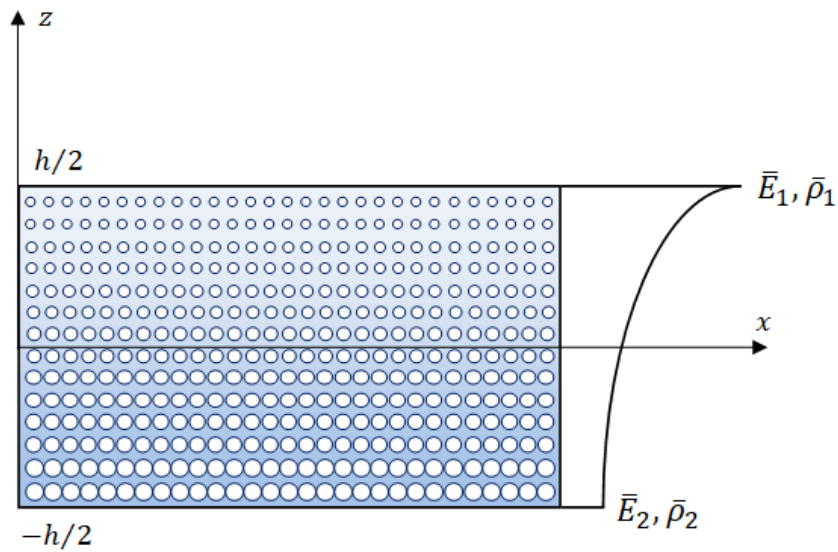
W pracy magisterskiej autorstwa Wajs (Flis) pt. „Analiza mikrostruktury wyrobów gradientowych na bazie proszku żelaza ASC 100.29” [42] przeprowadzono badania doświadczalne własności materiałów porowatych. Obecnie, uwagę skupimy głównie na możliwościach modelowania teoretycznego materiałów gradientowych. Zakładamy, że właściwości mechaniczne w sensie macierzy sztywności scharakteryzowane są związkami fizycznymi dla materiałów izotropowych.

Funkcjonalne materiały gradientowe (FGM) posiadają ciągłą zmienność właściwości materiałowych z uwagi na przestrzenne zróżnicowanie rozkładu dwóch (lub więcej) składników. Materiały funkcjonalne umożliwiają zmianę sztywności struktury oraz rozkładu masy bez konieczności zmiany geometrii struktury, dlatego też FGM mogą być nowatorską koncepcją optymalizacji.

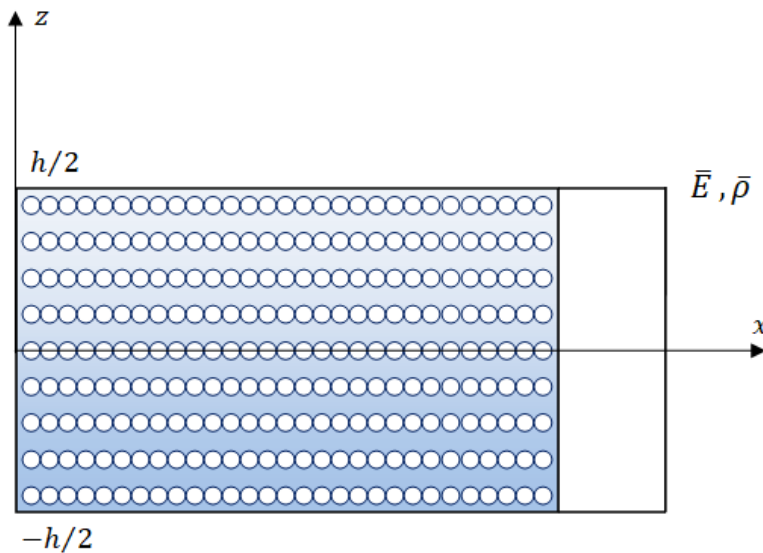
W przypadku modelowania właściwości mechanicznych przyjmuje się, że struktura może być niejednorodna z określonymi zaawansowanymi rozkładami porowatości/gęstości/sztywności w kierunkach x , y lub z . Rysunek 2.5 opisuje różne rodzaje rozkładu porowatości w kierunku grubości.



(a)



(b)



(c)

Rys. 2.5. Rodzaj rozkładu porowatości dla płyty wykonanej z FGM: (a) symetryczny; (b) niesymetryczny; (c) równomierny

Rozkłady porów mogą być jednorodne (rysunek 2.6(a)), symetryczne i niesymetryczne w kierunku z (rysunek 2.6(b) i 2.6(c)) albo mogą mieć zalecaną zmienność wzdłuż kierunku x (rysunek 2.6(d)) lub w kierunkach x i z (rysunek 2.6(e)). Sterowanie właściwościami globalnymi, na przykład gęstością ρ czy modułem sprężystości E , są opisane przez funkcję $P(x, z)$ charakteryzującą rozkłady porów – odniesienia w literaturze, np. [43, 44]:

$$P(x, z)/P_b = [(P_t/P_b - 1)f(z) + 1][1 - \psi(z)]\eta(x),$$

$$f(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \quad (2.16)$$

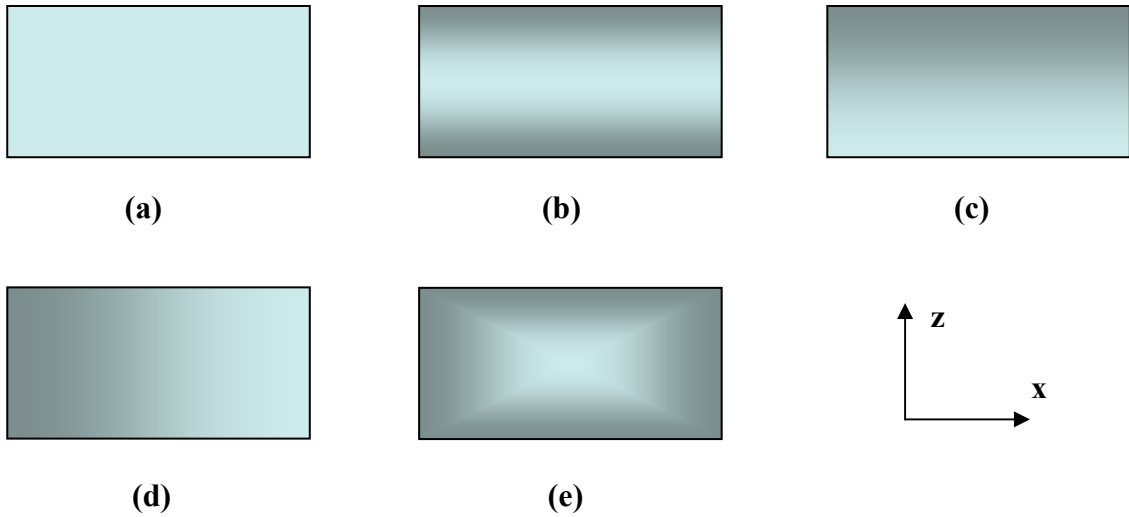
gdzie symbole t oraz b odnoszą się do właściwości materiału na górnej i dolnej powierzchni przekroju warstwy, n to wykładnik potęgowy, a $\psi(z)$ to rozkład porowatości wzdłuż grubości (w kierunku z), zdefiniowany w poniższy sposób:

$$\text{Typ I: } \psi(z) = c_p \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (2.17)$$

$$\text{Typ II: } \psi(z) = c_p \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{h} + 0.5\right)\right] \quad (2.18)$$

$$\text{Typ III: } \psi(z) = c_p \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{h} - 0.5\right)\right] \quad (2.19)$$

przy czym c_p oznacza wybrany rodzaj porowatości.



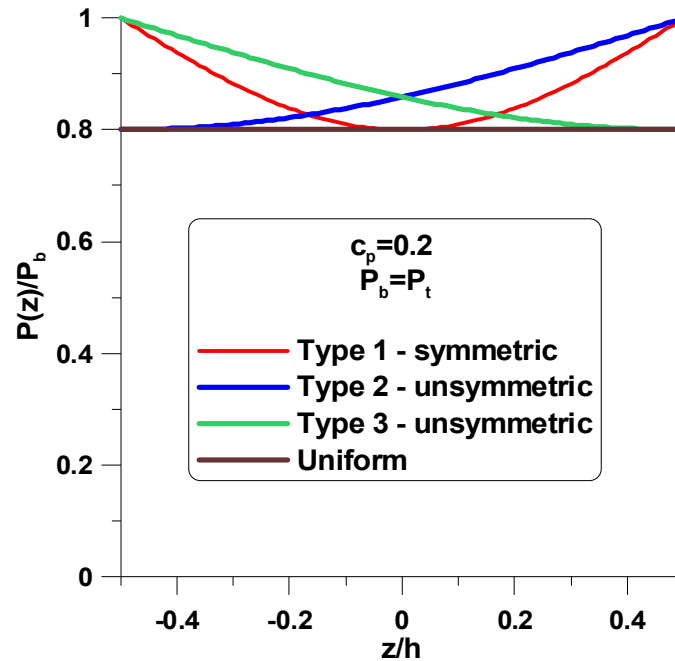
Rys. 2.6. Gradacja materiału – rozkład porów: (a) jednorodny ($\eta(x) = 1$); (b) symetryczny – typ I ($\eta(x) = 1$); (c) niesymetryczny – typ II oraz typ III ($\eta(x) = 1$); (d) gradacja wzdłuż kierunku x – typ IV; (e) klasyfikacja po przekątnej na płaszczyźnie $x - z$ – typ V

Należy podkreślić, że dla funkcjonalnych materiałów gradientowych FGM porowatość płyty może się zmieniać wzdłuż kierunku x i dlatego przyjmuje się następująca gradację porowatości/gęstości:

$$\text{Typ IV: } \eta(x)/P_l = 1 + (P_r/P_l - 1) \left(\frac{x}{L_x}\right)^2 \quad (2.20)$$

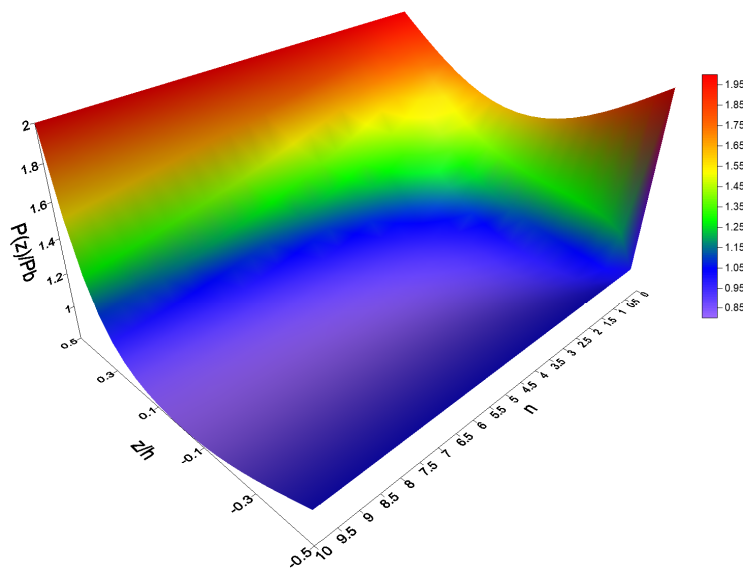
$$\text{Typ V: } \eta(x)/P_r = \begin{cases} P_l/P_r + \frac{x}{2L_x} (1 - P_l/P_r) & \text{dla } 0 \leq \frac{x}{L_x} \leq \frac{1}{2} \\ 1 + \left(\frac{2x}{L_x} - 1\right) (P_l/P_r - 1) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq \frac{x}{L_x} \leq 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Założmy, że moduł Younga E zmienia się wraz z kierunkami x, y, z zgodnie z prawami opisanymi przez równania (2.11) (2.16), (2.20) (lub ich kombinację), natomiast współczynnik Poissona ν jest stały.

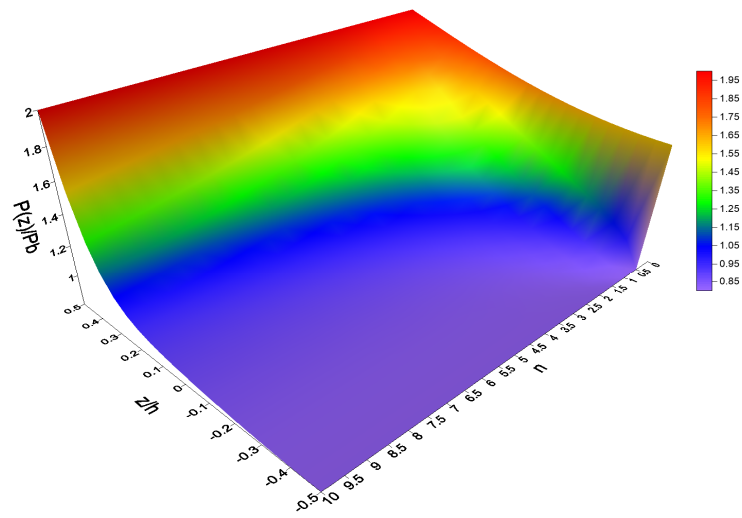


Rys. 2.7. Rozkład właściwości materiału dla $n = 0$

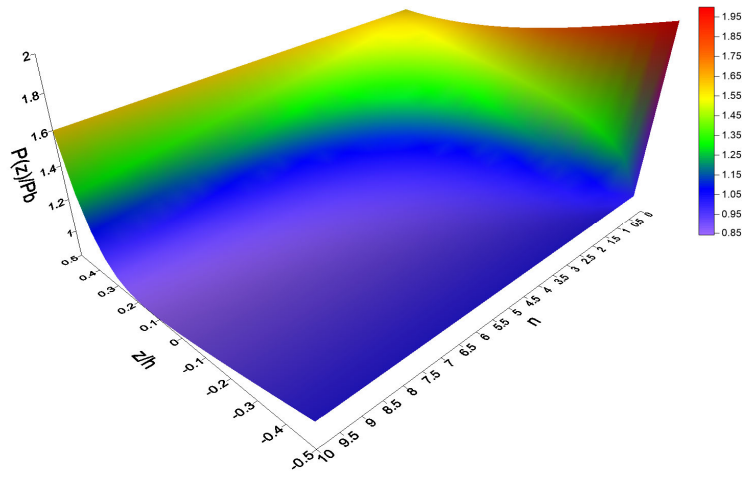
Zauważmy, że dla $n = 0$ rozkłady właściwości materiału mogą być symetryczne lub niesymetryczne – rysunek 2.7. Natomiast dla $n > 0$ rozkłady porów opisane przez funkcje (2.16)-(2.19) są zawsze niesymetryczne – rysunek 2.8.



(a)



(b)



(c)

Rys. 2.8. Przestrzenne niesymetryczne rozkłady właściwości materiału dla $P_t/P_b = 2$: (a) typ I; (b) typ II; (c) typ III

2.3. Zasada Hamiltona

W przypadku ciała sprężystego całkowitą energię potencjalną zdefiniujemy następująco:

$$\Pi = \int_V W dV - \int_{S_T} O_i U_i dS - \int_V F_i U_i dV = \Pi_{int} - \int_{S_T} O_i U_i dS - \int_V F_i U_i dV, \tag{2.22}$$

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

gdzie W – oznacza funkcję gęstości energii odkształcenia, V – to objętość zajmowana przez układ, O_i – jest rzutem składowej obciążenia powierzchniowego na i kierunek osi układu współrzędnych, S_T – to powierzchnia boczna, na której działają obciążenia O_i , U_i – są składowymi wektora przemieszczenia, a F_i – to siły objętościowe.

Naprężenia wywołane wzrostem temperatury ΔT w laminacie opisuje się poniższym wzorem:

$$\begin{aligned} \{N^{\Delta T}\} &= \{N_x^{\Delta T}, N_y^{\Delta T}, N_{xy}^{\Delta T}\} = \{\Delta T(A_{11}\alpha_1 + A_{11}\alpha_2), \Delta T(A_{12}\alpha_1 + A_{22}\alpha_2), \Delta T A_{66}\alpha_{12}\}, \\ [M^{\Delta T}] &= \{0, 0, 0\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}$ oznaczają współczynniki rozszerzalności cieplnej w głównych współrzędnych materiału.

Całkowita energia potencjalna typowego elementu jest wyrażona poniższym wzorem:

$$U_L = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\{\epsilon_m\}^{Tr} (\{N\} - \{N^{\Delta T}\}) + \{\kappa\}^{Tr} (\{M\} - \{M^{\Delta T}\})] d\Omega \quad (2.24)$$

podczas gdy energia kinematyczna laminatu:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 \right] d\Omega d\tau \quad (2.25)$$

gdzie Ω i ρ to odpowiednio objętość i gęstość laminowanej płyty.

Praca wykonana przez niekonserwatywne obciążenia aerodynamiczne jest opisana poprzez następujące równania [45]:

$$\begin{aligned} W^{\Delta p} &= \int_S dS \Delta p w, \\ \Delta p &= -\Lambda \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \vartheta_{\infty} + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \vartheta_{\infty} \right) - \mu \frac{\partial w}{\partial t}, \Lambda = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 / \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\mu = \rho_{\infty} V_{\infty} (M_{\infty}^2 - 2) / (M_{\infty}^2 - 1)^{3/2}$$

gdzie $\rho_{\infty}, V_{\infty}$ i M_{∞} oznaczają odpowiednio gęstość powietrza w strumieniu swobodnym, prędkość powietrza, liczbę Macha, a ϑ_{∞} oznacza kąt przepływu płynu.

W literaturze sformułowanie przedstawione równaniem (2.26) nosi nazwę liniowej teorii typu „piston” – patrz tabela 1.1. Szersza dyskusja określenia problematyki ciśnienia aerodynamicznego Δp została opisana w rozdziale 3 niniejszej rozprawy.

Praca wykonywana przez zewnętrzne obciążenia termo-mechaniczne na płycie, jest określana następująco:

$$W^{ext} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega, \quad N_x^0 = P_x - N_x^{\Delta T}, N_y^0 = P_y - N_y^{\Delta T} \quad (2.27)$$

Podstawowy układ równań można wyprowadzić z zasady Hamiltona:

$$\delta H = 0, \quad H = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (T - U_L) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (W^{\Delta p}) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (W^{ext}) \quad (2.28)$$

Poprzez zastosowanie liniowej teorii geometrycznie określa się zależności pomiędzy przemieszczeniem i odkształceniem. W przypadku płyt zależności te przedstawia się następująco:

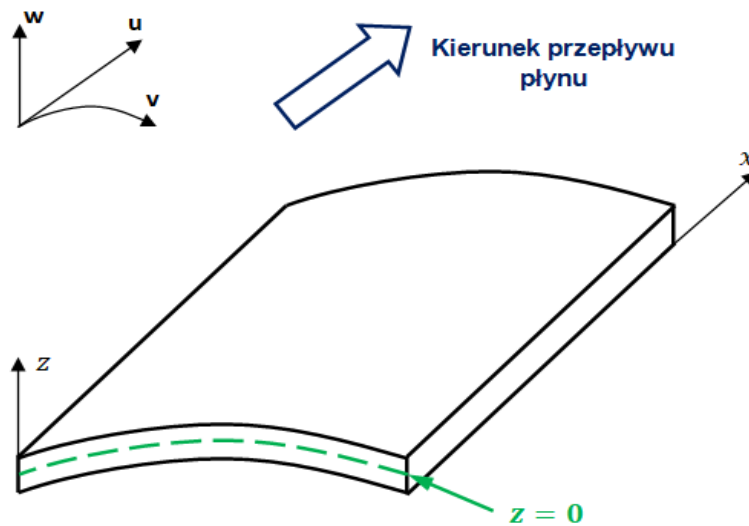
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right), \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z \quad (2.29)$$

Wprowadzając hipotezę Love'a-Kirchhoffa (L-K):

$$\tilde{U}_i(x, y, z) = u_i(x, y) + z \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2; \quad (2.30)$$

$$\tilde{U}_3(x, y, z) = w(x, y) \quad (2.31)$$

przy czym $u_1 = u$, $u_2 = v$, a $w(x, y)$ jest przemieszczeniem w kierunku z (patrz rysunek 2.9).



Rys. 2.9. Geometria paneli cylindrycznej

Korzystając z teorii poprzecznego ścinania pierwszego rzędu (FSDT) przemieszczenia możemy przedstawić w poniższy sposób:

$$\tilde{U}_i(x, y, z) = u_i(x, y) + z\psi_i(x, y), i = 1, 2; \quad (2.32)$$

$$\tilde{U}_3(x, y, z) = w(x, y) \quad (2.33)$$

przy czym ψ_1, ψ_2 to kąty obrotu w odniesieniu do powierzchni środkowej, $u_1 = u$, $u_2 = v$, a $w(x, y)$ jest przemieszczeniem w kierunku z .

Podstawiając zależności (2.30), (2.31) lub (2.32) i (2.33) do równania (2.29) ostatecznie otrzymujemy następujący wzór:

$$\varepsilon_{ij}(x, y, z) = \varepsilon_{ij}^{(m)}(x, y) + z\kappa_{ij}(x, y) \quad (2.34)$$

gdzie $\varepsilon_{ij}^{(m)}$ – oznacza odkształcenia błonowe, a κ_{ij} – jest parametrem zmiany krzywizny.

W przypadku struktur kompozytowych, aby wyznaczyć funkcjonal Π , należy obliczyć energię odkształcenia każdej z warstw niezależnie, a następnie zsumować po liczbie warstw. Korzystając ze wzoru (2.22), całkowita energia potencjalna układu wyraża się w poniższej postaci:

$$\Pi_{int} = \sum_{k=1}^N \Pi_{int}^{(k)} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \iint_{S_\Omega} W^{(k)} A_1 A_2 dx dy dz \quad (2.35)$$

gdzie k – jest numerem warstwy, N – określa liczbę warstw, $A_1 A_2 dx dy dz$ – to element objętości struktury $d\Omega$ natomiast $A_1 A_2$ – są parametrami Lamego.

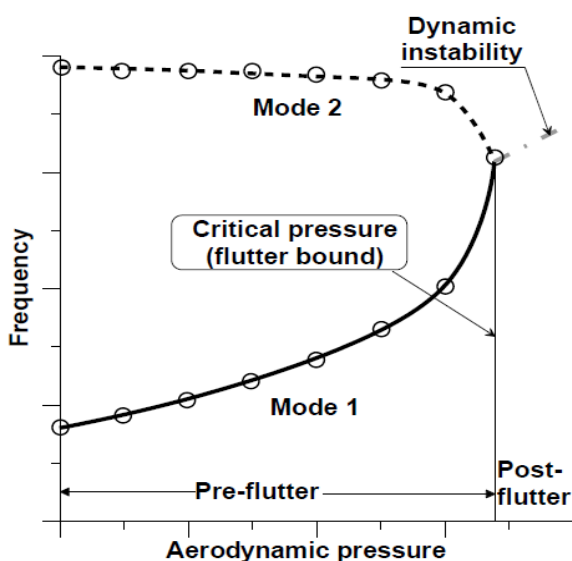
3. METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIENÍ UTRATY STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ

3.1. Wprowadzenie do problemu utraty stateczności dynamicznej

W wielu pracach badano charakterystykę flatteru konstrukcji aeroelastycznych [46-55], a zwłaszcza właściwości belek i płyt. Stosowano w nich różne metody: przybliżone, analityczne oraz numeryczne, na przykład metodę Bubnova-Galerkina (B-G) czy metodę elementów skończonych (MES). Dowell [37, 56, 57] badał nieliniową stabilność aeroelastyczną płyt dwu- i trójwymiarowych przy użyciu metody B-G. Haddadpour i inni [32, 58] badali aeroelastyczne zachowanie izotropowych i funkcjonalnych gradientowych paneli, gdzie przy formułowaniu równania ruchu również zastosowano metodę B-G. Często wykorzystywaną metodą w tego typu problemach jest metoda MES, na przykład Xue i Mei [59] przeprowadzili badania flatteru dwuwymiarowych nieliniowych paneli z efektem termicznym. Koo i Hwang [60] analizowali charakterystykę flatteru dla płyt warstwowych z tłumieniem strukturalnym, gdzie metoda MES została wykorzystana do modelowania równania ruchu.

Charakterystyka flatteru została przedstawiona na rysunku 3.1. Jeśli ciśnienie aerodynamiczne (*aerodynamic pressure*) powietrza wzrasta monotonicznie od zera, dwie wartości własne ω po pojawieniu się flatteru zblizają się do siebie (koalescencja częstotliwości).

Na granicy flatteru część rzeczywista częstotliwości własnej zmienia znak z zera na dodatni. Jeśli wzrost ciśnienia aerodynamicznego Λ prowadzi do zmniejszenia częstotliwości własnej ω , która w ostateczności jest równa zero, to forma uszkodzenia nazywana jest wyboczeniem. Dwie możliwe formy uszkodzenia – niestabilność dynamiczna (tj. flatter i wyboczenie), są określone przez zmianę funkcji $k(\Lambda)$. Opisanie stateczności dynamicznej polega na wyszukiwaniu tych charakterystyk (rysunek 3.1).



Rys. 3.1. Odchylenie bezwymiarowych częstotliwości naturalnych od ciśnienia aerodynamicznego

Wyznaczenie charakterystyk może być dokonane przy zastosowaniu następujących metod obliczeniowych:

- Metoda Rayleigha-Ritza (R-R) [49, 61-64];
- Metoda Bubnova-Galerkina (B-G) [56, 58, 65, 66];
- Metoda analityczna [45, 67];
- Metoda elementów skończonych (MES) [68-73].

3.2. Układ równań podstawowych, warunki brzegowe

Program symboliczny Mathematica umożliwia automatyczną generację układu równań podstawowych oraz warunków brzegowych dla przyjętych postaci funkcjonału. Rozważając obecnie hamiltonian H (2.28) jako zależny od funkcji $u_i(x, y)$, $\psi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) i $w(x, y)$ (zależności (2.32) i (2.33)) po przeprowadzeniu operacji symbolicznej wariacji hamiltonianu otrzymujemy ostatecznie układ pięciu równań różniczkowych drugiego rzędu. W zależności od rodzaju badanej struktury (płyty lub panele cylindryczne) oraz założonego typu materiałów kompozytowych (tzn. konfiguracji laminatu (2.15) lub rozkładu porowatości w materiałach funkcjonalnych) układ równań podstawowych może być sprzężony lub rozdzielony na dwa układy niezależnych równań. Sprzężenie występuje zawsze w przypadku paneli cylindrycznych, a dla płyt uzależnione jest od podanych wyżej elementów. Układ równań podstawowych jest układem równań różniczkowych liniowych jeżeli $\eta(x) = 1$ (patrz wzór (2.16)). Gdy $\eta(x)$ jest określone zależnością funkcyjną od kierunku x , układ równań podstawowych jest układem równań różniczkowych nieliniowych. W ostatnim przypadku możliwa jest tylko analiza numeryczna rozważanego problemu. Naszym zdaniem, nie można jednak stosować bezpośrednio metody elementów skończonych (MES) z uwagi na stopniową gradację własności badanego materiału funkcjonalnego.

Podstawowy układ równań różniczkowych wymaga uzupełnienia poprzez dodanie niezbędnych warunków brzegowych. Postać tych warunków otrzymywana jest automatycznie po zastosowaniu zasady wariacyjnej do hamiltonianu (2.28). Niezbędne warunki brzegowe wymieniono poniżej dla brzegu $x = 0$. Podobne postacie warunków brzegowych można podać dla pozostałych trzech brzegów struktury (płyt prostokątnych lub paneli cylindrycznych).

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{21} &= N_{21} \text{ lub } \delta u, \\
 \bar{N}_{22} &= N_{22} \text{ lub } \delta v, \\
 \bar{Q}_2 &= Q_2 \text{ lub } \delta w, \\
 \bar{M}_{21} &= M_{21} \text{ lub } \delta \psi_1, \\
 \bar{M}_{22} &= M_{22} \text{ lub } \delta \psi_2
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Przyjęty rodzaj warunków brzegowych ma istotny wpływ na uzyskiwaną postać rozwiązania. Ogólnie istnieje 21 różnych kombinacji warunków brzegowych (utwierdzenie – C, swobodne podparcie – S lub brzeg swobodny – F). Dla 6 przypadków warunków brzegowych można otrzymać rozwiązania w postaci analitycznej jeżeli dwa równoległe

brzezi konstrukcji są swobodnie podparte. Rozwiązanie analityczne istnieje tylko i wyłącznie w przypadku liniowej postaci równań różniczkowych ($\eta(x) = 1$ – wzór (2.16)). Symbolicznie 6 przypadków warunków brzegowych, dla których istnieją rozwiązania analityczne, oznaczamy jako: SSSS, SCSC, SCSS, SCSF, SSSF, SFSF.

3.3. Aproksymacja rozwiązania

W celu poprawnego rozwiązania zagadnień analizy stateczności dynamicznej dla konstrukcji posiadającej dowolne warunki brzegowe (spośród 21 wymienionych powyżej) wykonanych z różnego typu materiałów kompozytowych w rozprawie opracowano metodykę przybliżonego rozwiązania badanego problemu.

Wprowadźmy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\xi = \frac{x}{L_x}, \quad \eta = \frac{y}{L_y}, \quad \{\xi, \eta\} \in [0, 1] \quad (3.2)$$

oraz:

$$[A]^T = [A_{11}^u, A_{12}^u, \dots, A_{11}^v, A_{12}^v, \dots, A_{11}^w, \dots, A_{12}^w, \dots, A_{11}^{\psi_1}, A_{12}^{\psi_1}, \dots, A_{11}^{\psi_2}, A_{12}^{\psi_2}] \quad (3.3)$$

Każda ze składowych wektora $[A]$ jest współczynnikiem rozwinięcia w szeregi funkcji odpowiadającej każdej ze zmiennych:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_i \sum_j A_{ij}^u X_i(\xi) Y_j(\eta), \\ v(\xi, \eta) &= \sum_i \sum_j A_{ij}^v X_i(\xi) Y_j(\eta), \\ w(\xi, \eta) &= \sum_i \sum_j A_{ij}^w X_i(\xi) Y_j(\eta), \\ \psi_1(\xi, \eta) &= \sum_i \sum_j A_{ij}^{\psi_1} X_i(\xi) Y_j(\eta), \\ \psi_2(\xi, \eta) &= \sum_i \sum_j A_{ij}^{\psi_2} X_i(\xi) Y_j(\eta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} X_i(\xi) &= \xi^i (1 - \xi)^{bu1} (1 + \xi)^{bu2}, \\ Y_j(\eta) &= \eta^j (1 - \eta)^{bu3} (1 + \eta)^{bu4} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Symbole $bu1$, $bu2$, $bu3$ i $bu4$ odpowiadają postaci warunków brzegowych odpowiednio wzdłuż krawędzi 1, 2, 3 i 4. Dla swobodnych krawędzi (F) $bul = 0$ ($l = 1,2,3,4$), dla krawędzi swobodnie podpartych (S) = 1 i utwierdzonych (C) = 2.

Każda z funkcji X_i , Y_j spełnia żądane warunki brzegowe oraz tworzy układ funkcji ortogonalnych, tzn.:

$$\int_{-1}^1 d\xi X_i(\xi) X_j(\xi) = a_{ij},$$

$$\int_{-1}^1 d\eta Y_i(\eta) Y_j(\eta) = b_{ij}$$
(3.6)

3.4. Metoda Rayleigha-Ritza

Jedną z metod stosowanych w analizie wyboczenia powłok i płyt jest przybliżona metoda Rayleigha-Ritza (R-R) [74]. Metoda ta została zaproponowana przez Rayleigha, a uogólnienie podał Ritz.

Po wprowadzeniu zależności (3.4) do hamiltonianu (2.28), przeprowadzeniu całkowania po zmiennych z, ψ, η otrzymamy zależność funkcyjną:

$$H = H(A_{ij}) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} T(A_{ij}) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^{\Delta p}(A_{ij}) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} U_L(A_{ij})$$
(3.7)

W analizowanym przypadku przeprowadzenie operacji całkowania dla dowolnych funkcji rozkładu sztywności (zależności (2.12)-(2.14)) i gęstości jest automatyczne dzięki zastosowaniu pakietu symbolicznego Mathematica. Świadczy to o ewidentnej przewadze metody Rayleigha-Ritza (R-R) nad innymi metodami przybliżonymi.

W metodzie R-R konieczne jest poszukiwanie ekstremum funkcji H (minimum), tzn.:

$$\frac{\partial H}{\partial A_{ij}} = 0$$
(3.8)

Zarówno dla zależności podstawowych opisywanych równaniami różniczkowymi liniowymi lub nieliniowymi można dokonać poszukiwania ekstremum symbolicznie przeprowadzając operację (3.8).

Zależności typu (3.8) tworzą układ równań liniowych względem nieznanymi parametrów wektora A_{ij} , tzn.:

$$[\mathcal{E}_{RR}][A] = 0$$
(3.9)

Rozwiązanie układu równań (3.9) istnieje, gdy:

$$Det[\mathcal{E}_{RR}] = 0$$
(3.10)

Zależność (3.10) jest równoważna określeniu w postaci funkcyjnej $\omega^2(\Lambda)$, czyli charakterystyki flatteru dla określonej konstrukcji (rysunek 3.1).

3.5. Metoda Bubnova-Galerkina

Zgodnie z informacjami podanymi w niniejszym rozdziale wariacja hamiltonianu pozwala nam na uzyskanie układu podstawowych równań różniczkowych w postaci:

$$L_{ij} d_j = 0, \quad \text{gdzie} \quad d_i = [u, v, w, \psi_1, \psi_2], \quad i, j = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.11)$$

Metoda Bubnova-Galerkina (B-G) polega na obliczeniu rezyduów ważonych wyrażonych przez całki:

$$\int_{-1}^1 d\psi L_{ij} X_i(\psi) Y_j(\eta) X_k(\psi) d\psi d\eta = 0 \quad (3.12)$$

lub:

$$\int_{-1}^1 d\psi L_{ij} X_i(\psi) Y_j(\eta) Y_k(\eta) d\psi d\eta = 0 \quad (3.13)$$

Wykorzystanie warunków ortogonalności (3.6) pozwala na otrzymanie układu równań w postaci:

$$[\mathcal{E}_{BG}][A] = 0 \quad (3.14)$$

Macierz $[\mathcal{E}_{BG}]$ nie jest zawsze identyczna z macierzą $[\mathcal{E}_{RR}]$ (3.9). Rozwiązanie układu równań (3.14) istnieje, gdy:

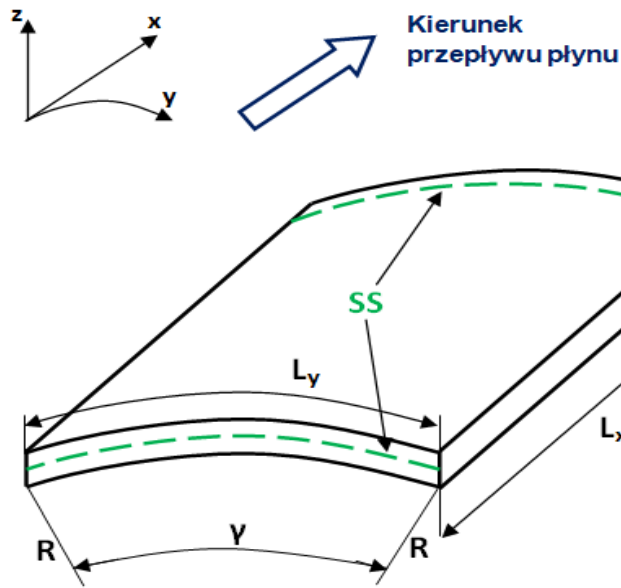
$$\text{Det}[\mathcal{E}_{BG}] = 0 \quad (3.15)$$

Podobnie jak poprzednio, powyższa zależność pozwala nam na uzyskanie relacji $\omega^2(\Lambda)$.

3.6. Metoda analityczna

Metoda analitycznego rozwiązywania zagadnień naddźwiękowego flatteru dla wielowarstwowych kompozytowych płyt i powłok cylindrycznych została dokładnie opisana przez Flis i Muc [75]. Rozważania zostały oparte o klasyczną teorię płyty/powłoki (CPT/CST) oraz o teorię poprzecznego ścinania pierwszego rzędu (FSDT).

Na rysunku 3.2 przedstawiono panel cylindryczną w przypadku której płyn przepływa wzdłuż osi x oraz narzucone są warunki brzegowe typu SS – dwie krawędzie $x = 0$ i $x = L_x$.



Rys. 3.2. Panel cylindryczna z warunkami brzegowymi typu SS

Dla teorii FSDT, przy wykorzystaniu liniowej teorii typu „piston” (omówionej w rozdziale 3.7) oraz pomijając efekty tarcia (ciśnienie aerodynamiczne działające na zakrzywioną powierzchnię $\Delta p = -\Lambda \partial w / \partial x$) podstawowy zestaw równań różniczkowych może być przedstawiony w następujący sposób:

$$L_{ij}d_j = F_{ij}d_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.16)$$

Szczegóły dotyczące wyprowadzenia relacji (3.16) z zasady Hamiltona są przedstawione w pracy Muc, Flis [67]. Jawna postać liniowych operatorów różniczkowych L_{ij} , F_{ij} została umieszczona w **Załączniku A** niniejszej rozprawy, przy czym: t oznacza czas, h to grubość powłoki, R to promień paneli cylindrycznej, u to przemieszczenia wzdłużne (x), v to przemieszczenia obwodowe (y), w to przemieszczenia normalne (z), ψ_1 , ψ_2 są to obroty normalne w odniesieniu do powierzchni środkowej powłoki, Λ oznacza ciśnienie aerodynamiczne, a ρ to gęstość materiału kompozytowego.

Przyjmując, że:

$$\psi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (\varepsilon_{xz} = 0), \quad \psi_2 = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\varepsilon_{yz} = 0) \quad (3.17)$$

układ równań różniczkowych (3.16) zostaje zredukowany do trzech równań z trzema nieznanymi funkcjami u, v, w . Jeśli promień R dąży do nieskończoności to odkształcenia płyt płaskich są opisane przez pięć zależności (3.16). Jednak, dwa pierwsze równania (nieznane funkcje u, v) są oddzielone od trzech ostatnich (w, ψ_1, ψ_2). W przypadku, gdy stosuje się liniową teorię typu „piston”, efekty wzdłużne związane ze zmiennymi u i v , są pomijane co skutkuje tym, że układ równań (3.16) dla płyt redukuje się do trzech równań dla trzech nieznanymi funkcji (w, ψ_1, ψ_2). Następnie przy użyciu równań (3.17) dla CPT podstawowa zależność jest zredukowana do jednego równania różniczkowego dla przemieszczenia normalnego w . Zakładając, że $F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0$, wiadome jest, że układ równań

(3.16) może być zredukowany do jednego liniowego równania różniczkowego dla jednej nieznannej funkcji zarówno w teorii FSDT jak i CPT, jednak rząd równań jest inny – pokazano to w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Rząd równań różniczkowych

Rząd równania różniczkowego (K) dla nieznannej funkcji w	Panele cylindryczne		Płyty prostokątne	
	FSDT	CST	FSDT	CPT
	10	8	6	4

Należy podkreślić, że relacje przedstawione w **Załączniku A** są zapisane dla określonej postaci laminatu odpowiadającej wyeliminowaniu elementów $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = B_{ij} = 0$. Zasadność takiego założenia przedstawił Muc [76].

Rozwiązanie metodą analityczną w przypadku struktury przedstawionej na rysunku 3.2 omawiane jest przez Flis, Muc [75] i może być łatwo stosowane w problemach związanych z lokalnymi teoriami. Składowe odkształceń powierzchni środkowej są przybliżone za pomocą funkcji:

$$d_i = [u, v, w, \psi_1, \psi_2] = [A \cos(\alpha_m x), B \sin(\alpha_m x), C \cos(\alpha_m x), G \sin(\alpha_m x), H \sin(\alpha_m x)] \exp[ry] \sin(\omega t), \alpha_m = m\pi/L_x \quad (3.18)$$

Szczegółowa analiza wyników liczbowych pokazuje wyraźnie, że wpływ tłumienia jest znikomy (odniesienia w literaturze [7, 20]) i efekty te są również pomijane w dalszej analizie.

Ostatecznie, rozwiązanie równania charakterystycznego (**Załącznik A**) zostaje zredukowane do rozwiązania równania algebraicznego dla nieznanymi parametrów r_m . Równanie algebraiczne stanowi problem standardowej wartości własnej dla całego układu.

Rozwiązanie równania (3.16) można znaleźć stosując regułę Cramera. Wstawiając przybliżone rozwiązanie równania (3.18) i rozważając układ czterech równań, które można zapisać jako:

$$[L]_{4 \times 4} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{15} w \\ L_{25} w \\ L_{35} w \\ L_{45} w \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

równanie (3.19) można traktować jako układ liniowych równań algebraicznych z niewiadomymi w postaci wektora $[u, v, \psi_1, \psi_2]^T$. Rozwiązanie układu (3.19) może być przedstawione w poniższej postaci:

$$x_i = \frac{\det(L_i)}{\det(L)} \quad (3.20)$$

gdzie L_i jest macierzą utworzoną przez zastąpienie i kolumny macierzy L kolumną wektorów z prawej strony równania (3.19).

Wstawiając wyniki równania (3.20) w piątą wiersz równania (3.16) otrzymuje się:

$$L_{5r} \frac{\det(L_r)}{\det(L)} w + L_{55} w = -\rho h \ddot{w} \quad (3.21)$$

Ostatecznie równanie (3.21) przedstawia zależność wielomianową dla nieznanych pierwiastków r :

$$r^K + \sum_{k=0}^{K-1} a_k r^k = 0 \quad (3.22)$$

gdzie K to maksymalny rząd równania algebraicznego określony przez rząd równań różniczkowych przedstawionych w tabeli 3.1. Jawną formę współczynników a_k przedstawiono dla teorii CPT w pracy Muc, Flis [67] ($K = 4$), a dla teorii CST w pracy Muc [77] ($K = 8$).

Prace Abela (1826) i Galoisa (1832) pokazały, że ogólne równania wielomianowe o stopniu wyższym niż czwarty nie mogą być rozwiązane w pierwiastkach. Jak zauważono w pracy Muc, Flis [67], obliczenia numeryczne pierwiastków takich wielomianów nie są wygodne. W **Załączniku B** przedstawiono rozwiązanie równań algebraicznych (3.22) w analitycznej formie zamkniętej zaproponowanej przez Kulkarniego [78-81].

Zastąpienie wyrażeń (3.18) równaniami (3.20) powoduje powstanie równań algebraicznych dla nieznanych stałych A_i, B_i, C_i oraz G_i . Ostatecznie dziesięć równań liniowych opisujących warunki brzegowe przyjmuje następującą postać (jest ona przedstawiona dla sześciu, a nie dziesięciu warunków brzegowych ze względu na brak miejsca):

$$[\mathcal{E}_A] \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ bc_1(r_1, y=0) & bc_1(r_2, y=0) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ bc_2(r_1, y=0) & bc_2(r_2, y=0) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{r_1 L_y} & e^{r_2 L_y} & e^{r_3 L_y} & e^{r_4 L_y} & e^{r_5 L_y} & e^{r_6 L_y} \\ bc_1(r_1, y=L_y) & bc_1(r_2, y=L_y) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ bc_2(r_1, y=L_y) & bc_2(r_2, y=L_y) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Pierwszy i czwarty wiersz macierzy $[\mathcal{E}_A]$ pokazują jawną formę warunków brzegowych $w = 0$ na krawędziach. Rozwiązanie problemu wartości granicznych (3.23) jest możliwe jeżeli:

$$\text{Det}[\mathcal{E}_A] = 0 \quad (3.24)$$

Należy podkreślić, że dla teorii CPT macierz $[\mathcal{E}_A]$ ma wymiar 4x4, ponieważ wymagane są tylko dwa warunki brzegowe na każdej z krawędzi.

Korzystając z procedur opisanych powyżej, można wyznaczyć charakterystyki aerodynamiczne reprezentujące zmiany częstotliwości w zależności od ciśnienia aerodynamicznego – patrz rysunek 3.1.

3.7. Metoda elementów skończonych

Powszechnie stosowaną metodą w analizie naddźwiękowego flatteru jest metoda elementów skończonych (MES). Metoda ta została po raz pierwszy wprowadzona w analizie charakterystyki flatteru w przypadku paneli przez Olsona [82] w 1967 roku. Przegląd istniejących prac został przedstawiony przez Bismarck-Nasr [83, 84]. Wielu badaczy stworzyło własne procedury analizy problemów związanych z flatterem. Analizę flatteru można przeprowadzać wykorzystując również komercyjne pakiety elementów skończonych, takie jak np. Ansys, Abaqus czy NISA II Family of Programs (NISA II/Aero). Nową propozycją w zakresie projektowania/analizy aeroelastycznej jest pakiet ZEUS (ZONA) [85, 86].

Korzyści z zastosowania pakietów elementów skończonych są oczywiste, ponieważ pozwalają na:

- Wprowadzenie różnych wariantów warunków brzegowych;
- Wprowadzenie różnych wariantów właściwości materiałowych – FGM, CNT, sandwiczne;
- Zbadanie dowolnych konfiguracji laminatu bez eliminacji elementów B_{ij} , A_{16} , A_{26} , D_{16} , D_{26} w macierzach sztywności;
- Stosowanie teorii poprzecznego ścinania pierwszego rzędu powłoki/płyty (FSDT) zamiast prostszych teorii Love’a-Kirchhoffa (L-K);
- Wykorzystanie w procedurach optymalizacji.

Jednak, pakiety te posiadają również wady, a jako najważniejsze można wskazać następujące problemy:

- Dokładność wyników rozwiązyanych problemów z flatterem;
- Rozwiązywanie problemów optymalizacji, szczególnie w przypadku struktur laminowanych, w których często spotyka się niejednorodność rozwiązań.

Istnieje szereg metod numerycznych oraz teorii stosowanych w pakietach elementów skończonych. Niektóre z nich to:

- Metoda Vortex-Lattice (VLM);
- Metoda Doublet-Lattice (DLM);
- Metoda Movchan-Krumhaar;
- Teoria typu „piston”.

Szersze omówienie metod numerycznych stosowanych w analizie charakterystyki flatteru zostało przedstawione w pracy Flis, Augustyn, Muc [87]. Poniżej zostaną przytoczone oraz krótko opisane wybrane metody numeryczne.

Pierwszą omawianą metodą, używaną w analizie flatteru, jest metoda Vortex-Lattice (VLM), która służy do obliczania rozkładu ciśnienia dla analizowanej struktury przy stałym, kompresyjnym przepływie poddźwiękowym. Aby zastosować VLM, strukturę dzieli się na małe trapezowe elementy (boksy). Elementy te są jak seria małych skrzydeł, które układają się w formacje, a każdy z nich ma swój własny kilwater (wir w kształcie podkowy) i linię podnoszenia. Jeśli wir opadający jest umieszczony w punkcie 1/4 cięciwy (z punktem, który

spełnił warunki brzegowe skrzydła w punkcie 3/4 cięciwy), wytworzy on środek aerodynamiczny i dokładną wartość nachylenia krzywej wznoszenia dla dwuwymiarowego przypadku nachylenia skrzydła.

Spadek w punkcie kontrolnym panelu (3/4 cięciwy) elementu skrzydła jest podany przez:

$$\left\{ \frac{w_i}{U} \right\} = \frac{1}{4\pi} [F] \{ \Delta C_p \} \quad (3.25)$$

W analizie flatteru, dla prędkości poddźwiękowych, niemalże od trzydziestu lat, stosuje się metodę Doublet-Lattice (DLM) [88-90]. Pełne opracowanie tej metody jest dostępne w literaturze [91], gdzie autorzy opisali podstawowy przepływ płynu i podali obliczenia numeryczne.

Aby móc rozwiązać problemy występujące w strukturze (dla prędkości poddźwiękowych lub naddźwiękowych) należy zacząć od poniższej relacji:

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi\rho U} \iint_S K(x, y; \xi, \eta; M_\infty, k) \Delta p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.26)$$

gdzie $K(x, y; \xi, \eta; M_\infty, k)$ to forma równania całkowego (różna przy przepływie poddźwiękowym i naddźwiękowym).

Metoda DLM może być opisana jako metoda elementów skończonych (MES) w analizie aerodynamicznej, gdzie struktura jest podzielona na małe trapezowe elementy (boksy) – podobnie jak w metodzie VLM. Elementy te są ułożone w linii, równoległe do krawędzi struktury i swobodnego strumienia. Na krawędziach elementów znajdują się linie z określonymi warunkami brzegowymi.

Prędkość normalna indukowana w punkcie (x, y) może być opisana jako suma prędkości normalnych indukowanych przez n linii podwójnych:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^N \Delta p_n \frac{1}{8\pi\rho U} \iint_S K(x, y; \xi, \eta; M, k) d\xi d\eta \quad (3.27)$$

Wielkość Δp_n można określić, gdy powyższe równanie jest stosowane w n punktach struktury, a $w(x, y)$ jest znane z kształtu i formy. Dla paneli o orientacji dyskretnej zależność ciśnienie – prędkość płynu jest określona przez:

$$\{w\} = [B] \{\Delta p\} \quad (3.28)$$

Niestabilne ciśnienie jest opisane poniższym równaniem:

$$\{\Delta p\} = [B]^{-1} \{w\} \quad (3.29)$$

Charakterystykę flatteru można dość dokładnie przewidzieć za pomocą teorii typu „piston” dla naddźwiękowej prędkości lotu (liczba Macha > 1.5). Zgodnie z tą teorią, niestabilne siły aerodynamiczne na elemencie skrzydłowym $dx dy$ są zależne od ruchu samego elementu. Lokalne ciśnienie perturbacyjne (w sensie lokalnego opadania) jest podawane przez:

$$p(x, y, t) = p_{\infty} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{w(x, y, t)}{c_{\infty}} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.30)$$

gdzie p jest niezakłóconym ciśnieniem przepływu, c to prędkość dźwięku, γ to stosunek ciepła właściwego gazu.

Binominalne rozszerzenie równania (3.26) daje poniższą zależność:

$$p - p_{\infty} = \rho c_{\infty} \left\{ \frac{w(x, y, t)}{c_{\infty}} + \frac{\gamma + 1}{4} \left[\frac{w(x, y, t)}{c_{\infty}} \right]^2 + \frac{\gamma + 1}{12} \left[\frac{w(x, y, t)}{c_{\infty}} \right]^3 + \dots \right\} \quad (3.31)$$

Dla ogólnego ruchu profilu o symetrycznym rozkładzie grubości $2Z(x, y)$, bez średniego pochylenia i średniego przemieszczenia powierzchniowego $w(x, y, t)$ z równania (3.31) (uwzględniając dwa pierwsze warunki) można zapisać:

$$\begin{aligned} \Delta p(x, y, t) &= \frac{4q_{\infty}}{M} \left[1 + \frac{\gamma + 1}{2} M \frac{\partial Z}{\partial x} \right] \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{M^2 - 1}{M^2 - 2} \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) w(x, y, t) \\ &= 2\rho_{\infty} c_{\infty} \left[1 + \frac{\gamma + 1}{2} M \frac{\partial Z}{\partial x} \right] \left(U \frac{\partial}{\partial x} + \frac{M^2 - 1}{M - 2} i\omega \right) w(x, y) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ciśnienie aerodynamiczne Δp dla wielowarstwowych laminowanych paneli wynika z równania (3.32) i zostało zdefiniowane we wzorze (2.26).

Do określenia stabilności układu po dodaniu efektów tłumienia aerodynamicznego używana jest metoda Movchan-Krumhaar. Movchan zastosował tę metodę do analizy flatteru dla płaskich płyt, a Krumhaar rozszerzył ją o analizę flatteru dla powłok cylindrycznych. Krótki opis tej metody został przedstawiony poniżej.

Dla wartości skończonej g_T , wartość własna Z^2 w wyznaczniku flatteru jest zespolona. Głównym problemem jest znalezienie zależności pomiędzy wartością własną $Z_n(Q)$ ze zmienną przepływu zewnętrznego (Q), która będzie stanowić kryterium graniczne stateczności. Warunek ten może być przedstawiony graficznie za pomocą paraboli stateczności, której równanie jest podane za pomocą równania:

$$(Im Z)^2 = g_T Re Z \quad (3.33)$$

Dla danej wartości parametru przepływu (parametr ciśnienia dynamicznego Q) stabilność układu jest określona przez to czy $Z_n(Q)$ leży wewnątrz paraboli stabilności, na zewnątrz czy

na niej. Numerycznie, bardzo trudno jest znaleźć wartość Q_{cr} , dla której co najmniej jedna wartość własna leży właśnie na paraboli stabilności – stąd punkt znajdujący się tuż poza parabolą stabilności odpowiadający krytycznemu parametrowi ciśnienia dynamicznego Q_{cr} .

4. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTYMALIZACJI

4.1. Wprowadzenie do zagadnień optymalizacji

Jak wspomniano w rozdziale 1.3, dokładny przegląd literatury dotyczącej zagadnień optymalizacji konstrukcji kompozytowych w warunkach utraty stateczności dynamicznej przedstawiono w pracy Muc, Flis, Augustyn [39]. W cytowanym artykule przeglądowym omówiono 276 prac z tej dziedziny. Dokonana została klasyfikacja zagadnień optymalizacji z uwagi na:

1. Rodzaj funkcji celu:
 - 1.1. Deterministyczny;
 - 1.2. Stochastyczny;
2. Rodzaj zmiennych decyzyjnych:
 - 2.1. Fizyczne (materiałowe):
 - 2.1.1. Wielowarstwowe materiały kompozytowe (MK);
 - 2.1.2. Funkcjonalne materiały gradientowe (FGM);
 - 2.2. Geometryczne:
 - 2.2.1. Parametry przekroju – zmienna (stopniowana) grubość;
 - 2.2.2. Geometria struktury:
 - 2.2.2.1. Płyty prostokątne, trójkątne, trapezowe;
 - 2.2.2.2. Powłoki cylindryczne, w tym także małowyniosłe;
 - 2.2.2.3. Małowyniosłe powłoki stożkowe lub o podwójnej krzywiznie.

Przedstawiony powyżej podział zagadnień nawiązuje bezpośrednio do tych wprowadzonych w pracy Muc, Flis, Augustyn [39]. Ponadto w artykule przeglądowym Muc, Flis, Augustyn [39] omówiono problematykę numerycznego rozwiązywania zadań flutteru oraz możliwości implementacji w metodach numerycznych i analitycznych różnorodnych rodzajów optymalizacji. Szczegółowe informacje na temat formułowania różnych problemów optymalizacji można znaleźć w literaturze [92].

W celu sformułowania problemu optymalizacji konieczne jest zdefiniowanie następujących pojęć:

- Wektor zmiennych decyzyjnych i płaszczyzna zmiennych decyzyjnych;
- Funkcja celu lub funkcjonal celu;
- Zestaw ograniczeń w postaci równości lub nierówności.

W tej części rozprawy doktorskiej zostaną przedstawione ogólne aspekty dla zagadnienia optymalizacji, zwłaszcza te związane ze stosowanymi procedurami numerycznymi. Co więcej, szczegółowe sformułowania konkretnych problemów optymalizacji zostaną podane w kolejnych podrozdziałach.

Rozwiązanie każdego problemu inżynierskiego jest określane przez zestaw niezależnych zmiennych, które można nazwać zmiennymi decyzyjnymi \vec{s} (nie tylko w problemach optymalizacji). Założono, że wektor \vec{s} posiada l niezależnych składowych. W zależności od sformułowania problemu optymalizacji, każda ze zmiennych decyzyjnych s_i może być reprezentowana jako:

- Zmienna ciągła rzeczywista, tj.:

$$s_i \in R, \quad i = 1, 2, \dots, l; \quad (4.1)$$

- Zmienna dyskretna, tj.:

$$s_i \in C = \{e_1, e_2, \dots\}, \quad i = 1, 2, \dots, l; \quad e_p \in R \text{ lub } e_p \in N \quad (4.2)$$

Płaszczyzny zmiennych decyzyjnych definiowanych za pomocą wzorów (4.1) i (4.2) (indeks oznacza typ zmiennej, która została użyta) są w stanie opisać wszystkie możliwe zmiany zmiennych decyzyjnych rozpatrywanych w danym problemie optymalizacji (w przeciwieństwie do obszaru, na który nakładane są ograniczenia) i dlatego są określane jako wolne płaszczyzny wyszukiwania.

Ograniczenia (w postaci nierówności lub równości) wynikające z analizy zjawiska fizycznego lub ze względów technologicznych są jedynymi ograniczeniami analizowanych tu problemów optymalizacji. Można je zapisać w następujący sposób:

$$g_j(\vec{s}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (4.3)$$

$$h_k(\vec{s}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.4)$$

Dla uogólnienia opracowanych w niniejszej rozprawie procedur numerycznych, problem optymalizacji zostaje sformułowany jako poszukiwanie maksimum funkcji celu/funkcjonału celu f :

$$Maxf(\vec{s}) \quad (4.5)$$

W celu uogólnienia analizy numerycznej różnych problemów optymalizacji omówionych w dalszej części pracy, problem wyszukiwania *Min* lub *MinMax* jest przekształcony w sposób klasyczny (tylko w programie numerycznym) na zadanie wyszukiwania maksimum.

Dla danego typu płaszczyzny zmiennych decyzyjnych s ((4.1) lub (4.2)), problem optymalizacji (4.3) - (4.5) będzie wyrażony za pomocą trzech symboli:

$$\langle S, f, \phi \rangle \quad (4.6)$$

gdzie $\phi(s)$ jest funkcją Boolea, a S odpowiada płaszczyźnie zmiennych decyzyjnych.

Funkcja Boolea $\phi(s)$ może:

- Spełniać warunki (4.3), (4.4);
- Nie spełniać warunków (4.3), (4.4).

Inna metoda klasyfikacji związana jest z typem zmiennych decyzyjnych definiowanych jako zmienne rzeczywiste lub dyskretne. Generalnie, można wyróżnić trzy typy zmiennych:

- W optymalizacji wymiarowej (parametrycznej) zmienne obliczeniowe określają rozkład grubości struktury oraz jej parametry charakteryzujące przekrój poprzeczny;
- W optymalizacji kształtu, są to zmienne opisujące:

- Geometrię (a więc również kształt) zewnętrznej krawędzi struktury;
- Geometrię środkowej powierzchni struktury (belki, płyty, powłoki);
- W optymalizacji topologicznej struktury, zmienne decyzyjne definiują:
 - Sposób łączenia elementów, obszarów lub części składowych struktury;
 - Liczbę i rozkład przestrzenny elementów struktury;
 - Rozkład materiałowy w strukturze.

Przy projektowaniu optymalnej topologii struktury, zestaw zmiennych decyzyjnych może ulec zmianie w procesie optymalizacji.

Powyższa definicja została wprowadzona przez Kirscha [93] w 1989 roku, zaś identyczna klasyfikacja została zaprezentowana w monografii [94] opublikowanej w 2002 roku. Autor cytowanych prac wskazuje, że w wielu przypadkach rozwiązywane są problemy, w których jednocześnie dokonuje się zmian zmiennych topologicznych, geometrycznych i wymiarowych (patrz np. [95]) i takie zadania nazywane są w języku angielskim „lay-out optimization”, co najlepiej przetłumaczyć jako optymalizacja struktury. Jednak pod koniec lat osiemdziesiątych XX wieku Bendsøe [96, 97] wprowadził koncepcję optymalizacji topologicznej, która oznacza również zmiany w rozmieszczeniu materiału w strukturze. W monografii [98] wyjaśniono, że w rzeczywistości optymalizacja topologiczna rozumiana jest jako optymalizacja struktury materiału stanowiącego konstrukcję, w sensie poszukiwania optymalnej gęstości materiału $\rho(x)$ związanej z właściwościami mechanicznymi materiału poprzez relację:

$$C_{ijkl}(x) = \rho(x)C_{ijkl}^0 \quad (4.7)$$

z ograniczeniem w postaci:

$$\int_{\Omega} \rho(x) \leq V \quad (4.8)$$

gdzie $[C]$ jest macierzą sztywności. Zauważmy, że analogiczna sytuacja występuje w przypadku porowatych funkcjonalnych materiałów gradientowych (FGM) – zależności (2.16) - (2.21).

Koncepcja optymalizacji topologicznej obejmuje zatem pełen zestaw zmiennych decyzyjnych, które łączą w sobie zmienne obliczeniowe dotyczące wymiarów, kształtu, topologii i materiału. Powyższego uogólnienia nie należy jednak mylić ze ściśle rozumianą definicją topologii i ściśle rozumianą definicją zmiennych topologicznych w teorii optymalizacji.

W optymalizacji konstrukcji wykonanych z materiałów kompozytowych, zamiast optymalizacji topologicznej, najbardziej odpowiednia jest optymalizacja strukturalna. Wynika to z faktu, że optymalizacja topologiczna związana jest głównie z terminem homogenizacji materiału. Najbardziej zasadne wydaje się zastosowanie definicji: optymalizacja struktury materiałów kompozytowych z jednoczesnym rozróżnieniem poziomu analizy, tzn. możliwa jest optymalizacja na poziomie:

- Komórki elementarnej;
- Pojedynczej warstwy;
- Laminatu.

Jest to konieczne, ponieważ na każdym z wyżej wymienionych poziomów analizy, materiał kompozytowy, wprowadza różne typy zmiennych decyzyjnych, w tym zarówno geometrię i rodzaj zbrojenia, osnowę i warstwę międzyfazową lub orientację poszczególnych warstw, indywidualną grubość poszczególnych warstw oraz ich właściwości materiałowe. Zbiór zmiennych decyzyjnych, opisujących strukturę materiału kompozytowego, jest układem zmiennych geometrycznych i fizycznych, które charakteryzują (na danym poziomie analizy) jednoznacznie właściwości fizyczne materiału kompozytowego.

Kolejna różnica, pomiędzy definicjami zaproponowanymi w niniejszej rozprawie a podejściem Bendsøe'a [97], polega na możliwości opisanie struktury przez inne zmienne decyzyjne niż te, które charakteryzują fizykę problemu, a mianowicie zmienne wymiarów i kształtu opisujące geometrię problemu. W tym sensie, w dalszej analizie, wykorzystano dwa rodzaje zmiennych decyzyjnych:

- Fizyczne (materiałowe) – reprezentujące strukturę materiału kompozytowego, z którego jest wykonana;
- Geometryczne – charakteryzujące geometrię struktury.

Pojęcie zmiennych fizycznych związane jest bezpośrednio z kwestią projektowania materiałowego. Odnosi się do projektowania właściwości fizycznych materiału kompozytowego poprzez zmianę osnowy i materiału umocnienia, a także cech geometrycznych wzmocnienia. W drugim przypadku można tego dokonać poprzez zmianę wielkości, kształtu lub rozmieszczenia elementów wzmocniających albo poprzez zmianę ich orientacji i konfiguracji.

W przypadku zmiennych geometrycznych można postępować na dwa sposoby:

- Tylko poprzez dobór materiału przy poszukiwaniu optymalnego rozkładu grubości laminatu, grubości i kształtu warstw wzmocniających, kształtu powierzchni środkowej struktury lub kształtu krawędzi;
- Poprzez zaprojektowanie nowego materiału, jeśli w wymienionych powyżej problemach występują dodatkowe ograniczenia (technologiczne, geometryczne itp.), których nie spełnia żaden z dostępnych obecnie materiałów.

Należy podkreślić, że w niniejszej rozprawie wykorzystano również termin konfiguracji laminatu w odniesieniu do zbioru zmiennych decyzyjnych opisujących strukturę materiału kompozytowego na poziomie laminacji i odnoszących się bezpośrednio do terminu konfiguracji laminatu stosowanego w literaturze anglosaskiej. Pojęcia tego nie należy mylić z terminem konfiguracji kombinatorycznej wprowadzonym w matematyce kombinatorycznej, ponieważ w matematyce ma ono zupełnie inne znaczenie.

4.2. Funkcje celu

Zasadniczym elementem opisującym zagadnienie utraty stateczności dynamicznej jest charakterystyka przedstawiona w układzie ciśnienie aerodynamiczne - częstotliwość drgań (przedstawiona na rysunkach 1.6 oraz 3.1). Poprzez zmianę parametrów optymalizacji s_i można uzyskać zmianę charakterystyki układu.

Podstawowym elementem charakterystyk $\omega^2 - \Lambda$ jest wartość częstotliwości drgań swobodnych odpowiadających wartości ciśnienia aerodynamicznego $\Lambda = 0$. Ma to szczególne znaczenie dla konstrukcji anizotropowych, gdzie koalescencja form może występować dla różnych wartości drgań swobodnych, niekoniecznie sąsiednich – można to porównać na rysunku 1.6(a) z rysunkiem 1.6(b). Jak podkreślono w pracy Muc [76] w przypadku płyty

kompozytowych, w celu rozwiązania bardziej powszechnych problemów aeroelastycznych (dywergencja, flutter i reakcja aeroelastyczna dla prędkości poddźwiękowych i naddźwiękowych), analizę rozpoczyna się od modelowania elementów skończonych i badań drgań swobodnych. Następnie formy własne są interpolowane z punktów siatki strukturalnej do punktów kontroli aerodynamicznej w celu sformułowania równań ruchu i zbadania krytycznych prędkości dywergencji i flutteru, częstotliwości flutteru itp. Gdy tłumienie aerodynamiczne jest nieznaczące, analizę charakterystyki flutteru paneli wykonuje się zwykle metodą koalescencji częstotliwości. W przypadku, gdy parametr ciśnienia dynamicznego jest równy zeru, wartości własne układu są rzeczywiste i dodatnie. W zasadzie są to częstotliwości własne układu w próżni. Ponieważ parametr ciśnienia dynamicznego jest zwiększany od wartości zerowej częstotliwości stale się zmieniają, niektóre maleją, a niektóre wzrastają. Dla pewnej wartości parametru ciśnienia dynamicznego, znanego jako krytyczny parametr ciśnienia dynamicznego, dwie z wartości własnych są bardzo zbliżone do siebie i stają się parą sprzężonych liczb zespolonych. Takie łączenie częstotliwości znane jest jako koalescencja częstotliwości.

Kształt formy drgań ma istotne znaczenie w przeprowadzanej analizie. Długie i smukłe konstrukcje narażone na duże obciążenia aerodynamiczne są wrażliwe na zjawisko flutteru. W zależności od charakteru samej struktury, kształt formy może mieć różne poziomy złożoności. W aerodynamice zewnętrznej (takiej jak skrzydła samolotu) kształt formy może być kombinacją pierwszych form własnych (formy muszą mieć taką częstotliwość, aby mogły być sprzężone przez przepływ). W przypadku przepływów wewnętrznych, kształty form są na ogół niezaburzone. Główną różnicą między aeroelastycznością wewnętrzną i zewnętrzną jest sztywność materiału i wyraża się ją za pomocą tzw. stosunku masy który określa stosunek masy struktury do masy otaczającego powietrza wewnątrz okręgu o promieniu równym połowie cięciwy. W maszynach turbinowych łopatki są sztywne i dlatego stosunek masy jest większy niż w przypadku skrzydeł samolotu. W 1994 roku Lovejoy [99] skonstruował zbiór kształtów form dla płyt laminowanych, cienkich, prostokątnych, pochylonych i trapezowych. Problemy związane z modelowaniem skośnych płyt kompozytowych z elementami skończonymi omówili Fantuzzi i pozostali [100].

4.2.1. Częstotliwości drgań swobodnych ($\Lambda = 0$)

Drgania wielowarstwowych płyt kompozytowych cieszyły się dużym zainteresowaniem wielu autorów, a do większości ich prac nawiązywali m.in. Yu [101], Kapania i Raciti [102] oraz Reddy i Khdeir [103]. Analizę drgań naturalnych podwójnie zakrzywionych struktur kompozytowych i sandwiczowych przeprowadzili Tornabene i pozostali [104, 105]. Optymalizacja częstotliwości naturalnych jest również centralną koncepcją w projektowaniu kompozytowych struktur płytowych. Zmienne decyzyjne (oznaczone wektorem \mathbf{s}), takie jak grubości warstw i kąty warstw, można wykorzystać do uzyskania optymalnej struktury.

Struktury o pewnych pożądanach częstotliwościach mogą być optymalizowane przy użyciu trzech różnych technik obliczeniowych – Grandhi [106], Szyszkowski i King [107]. Aby uniknąć rezonansu drgań w konstrukcjach lotniczych i morskich, płyty laminowane są zwykle projektowane dla maksymalnych podstawowych ograniczeń częstotliwości ω , tj.:

$$\text{Max } \omega(\mathbf{s}) \quad (4.9)$$

\mathbf{s}

Bert [108, 109], Reiss i Ramachandran [110] oraz Grenestedt [111] zmaksymalizowali podstawową częstotliwość cienkich laminatów symetrycznych, traktując kąt orientacji włókien każdej z warstw jako ciągłą zmienną decyzyjną. W cytowanych pracach [108-111] przeprowadzono analizę częstotliwości przy użyciu formy zamkniętej dla cienkich prostokątnych płyt laminowanych w oparciu o klasyczną teorię laminacji.

Drugim problemem optymalizacji jest dopasowanie częstotliwości [107]. Może być ono traktowane jako alternatywny lub czasami równoważny problem optymalizacji:

$$\underset{\mathbf{s}}{\text{Max}} [\omega_l(\mathbf{s}) - \omega_{l-1}(\mathbf{s})], l = 2, 3, \dots \quad (4.10)$$

Aby zwiększyć prędkość flutteru, projektanci starają się zwiększyć różnicę pomiędzy częstotliwościami form poprzez zwiększenie sztywności i zmianę rozkładu masy (Wright, Cooper [112]). Flutterowi można również zapobiec eliminując niektóre formy drgań, które powodują to zjawisko, poprzez manipulację określonymi zmiennymi decyzyjnymi (Chowdary i inni [113]) lub poprzez zastosowanie np. siłowników (Forster i Yang [114]).

4.2.2. Maksymalizacja wartości ciśnienia aerodynamicznego ($\Lambda > 0$)

Generalnie zagadnienie optymalizacji ciśnienia aerodynamicznego można sformułować w następujący sposób:

$$\text{Max } \Lambda(s_i) \quad (4.11)$$

W literaturze rozważane są różnorodne sformułowania powyższego problemu i są przedstawiane w następujący sposób:

$$\text{Max } \sqrt{\Lambda^2(s_i) - \Lambda_e^2} \quad (4.12)$$

sformułowanie domyślne z ograniczeniem zaproponowane przez Song, Li, Carrera, Hagedorn [30];

$$\text{Min } \left[1 - \frac{\Lambda(s_i) - \Lambda_e}{\Lambda_e} \right]^2 \quad (4.13)$$

sformułowanie domyślne z ograniczeniem zaproponowane przez Guo [115];

$$\text{Max } \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(s_i = \vartheta_{\infty}) c(s_i = \vartheta_{\infty}) d\vartheta_{\infty} \quad \text{gdzie} \quad \int_{-\infty}^{\infty} c(s_i = \vartheta_{\infty}) d\vartheta_{\infty} = 1 \quad (4.14)$$

maksymalizacja ważonej sumy krytycznych ciśnień aerodynamicznych przy zróżnicowanym prawdopodobieństwie funkcji gęstości orientacji przepływu – Li, Narita [116];

$$\text{Min}W \text{ gdzie } \Lambda(s_i) \leq \Lambda_e \quad (4.15)$$

skrzydło o minimalnej masie W z uwzględnieniem ograniczeń związanych z dywergencją/flutterem (Kameyama, Fukunaga [35]);

$$\text{Max}Q_{crit}(s_i) \quad (4.16)$$

maksymalizacja krytycznego parametru flatteru Q_{crit} , tj. funkcji sztywności panelu, tłumienia i ciśnienia dynamicznego strumienia swobodnego – Vijay, Durvasula [117].

Powyższe sformułowania dotyczą podejścia deterministycznego do zadań optymalizacji. W pracy Muc, Flis, Augustyn [39] podano także sformułowania zadań optymalizacji oparte na podejściu stochastycznym (zagadnienia niezawodności).

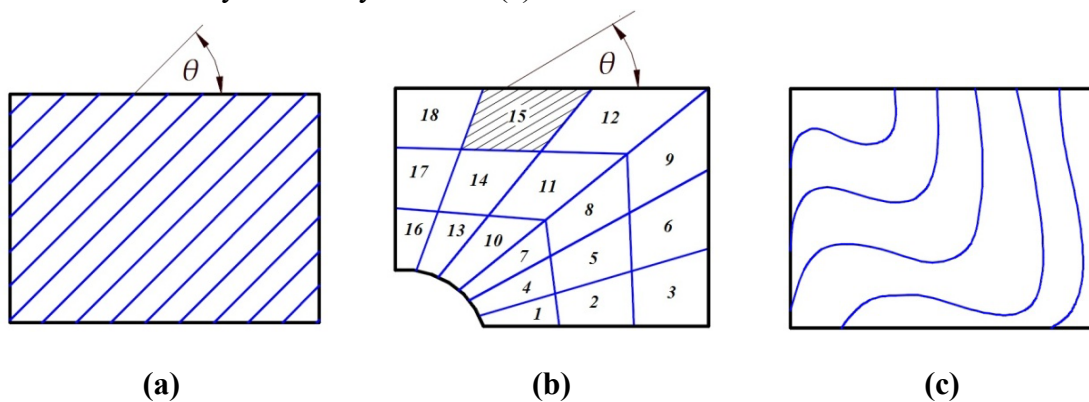
4.3. Fizyczne (materiałowe) zmienne decyzyjne

Zagadnienie projektowania fizycznych (materiałowych) zmiennych decyzyjnych dotyczy różnorodnych typów materiałów współczesnych włączając w to nie tylko wielowarstwowe struktury kompozytowe, ale także materiały funkcjonalne, materiały gradientowe, struktury sandwichowe itp.

4.3.1. Definicja zmiennych decyzyjnych dla laminowanych struktur kompozytowych

Rozważając wielowarstwowe kompozyty włókniste, możliwe jest zbadanie trzech różnych rodzajów struktur kompozytowych 2D:

- Włókna proste pokrywające całą strukturę – rysunek 4.1(a);
- Włókna proste o identycznym kierunku w części struktury – rysunek 4.1(b);
- Włókna zakrzywione – rysunek 4.1(c).



Rys. 4.1. Możliwe struktury poszczególnych warstw wykonane z włókien: (a) prostych; (b) prostych we fragmencie struktury; (c) zakrzywionych

Dla płaszczyzn 2D indywidualnych warstw laminatu, orientacja włókien $\theta(x, y)$ jest:

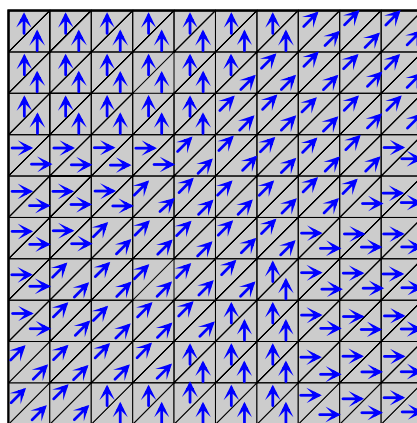
- Stała, jeśli $(x, y) \in \Omega$;
- Stała, jeśli $(x, y) \in \Omega_i$, $\cup_i \Omega_i = \Omega$, $i > 1$;
- Zmienna, jeśli $(x, y) \in \Omega$;

gdzie Ω oznacza płaszczyznę 2D zajmowaną przez strukturę typu płyta/powłoka oraz (x, y) są współrzędnymi określonymi w zakrzywionej płaszczyźnie 2D odpowiadającej powierzchni środkowej płyty/powłoki. Dla kompozytów włóknistych w sposób klasyczny definiuje się macierze sztywności 2D **[A]** (wydłużenie), **[B]** (sprężenie zginająco-rozciągające) oraz **[D]** (zginanie) co zostało opisane w rozdziale 2 niniejszej rozprawy doktorskiej.

Dla układu włókien zakrzywionych (rysunek 4.1(c)) liczba zmiennych decyzyjnych jest równa liczbie parametrów definiujących krzywą $\theta(x, y)$ – patrz Muc, Ulatowska [118, 119]. Dla laminatów o orientacji kątowej ($\pm\theta$) jedna zmienna decyzyjna określa dopuszczalne orientacje w przypadku pokazanym na rysunku 4.1(a) oraz liczbę obszarów Ω_i w przypadku pokazanym na rysunku 4.1(b). Liczba zmiennych decyzyjnych wzrasta dla dowolnych orientacji w każdej z warstw tworzących laminat. Dla hipotezy Love'a-Kirchhoffa (L-K), konfiguracja laminatu jest reprezentowana przez 12 parametrów laminacji w obszarze Ω (lub w każdym z obszarów Ω_i). Liczba ta, wzrasta dla teorii poprzecznego ścinania – Muc [120].

W wielu pracach badano wpływ orientacji włókien, konfiguracji laminatu i właściwości mechanicznych włókien na krytyczną prędkość aerodynamiczną [21, 22, 31-34, 121-125]. Hertz i współpracownicy [126] nazywali powyższy proces dopasowaniem aerodynamicznym, czyli opracowaniem, które wykorzystuje kierunkowe właściwości kompozytów włóknistych w powłokach skrzydeł, a także ukierunkowuje te materiały w sposób optymalny – można to znaleźć w literaturze [127-145]. W różnych opracowaniach obserwuje się dominującą rolę sztywności zginania D_{11} . Vijay i Durvasula [117] wprowadzili parametr krytyczny (4.14) jako wartość podzieloną przez wartość D_{11} . Podobne efekty zauważyli Rikards, Teters [146].

Zagadnienie kierowania i kontroli orientacji włókien w elementach skończonych (rysunek 4.1(b)) w połączeniu z optymalizacją topologii zostało omówione w pracach Muca i współpracowników [147, 148]. Rysunek 4.2 przedstawia przykład możliwych rozwiązań dla trzech rozważanych dyskretnych orientacji włókien (tj. $[0_2^0, \pm 45^0, 90_2^0]_s$).



Rys. 4.2. Optymalna orientacja włókien dla cienkich kwadratowych paneli

W dostępnej literaturze zauważono, że maksymalna prędkość flatteru może być zwiększana lub zmniejszana w zależności od zmiennego rozstawu włókien – Shih-Yao Kuo [53]. Stodzieck i współpracownicy [149, 150] badali zachowanie aeroelastyczne prostokątnego skrzydła kompozytowego. Kompozyty typu "tow-steered" wykorzystano do dostosowania zachowania aeroelastycznego – wykazały one dobrą wydajność w porównaniu z tradycyjnymi

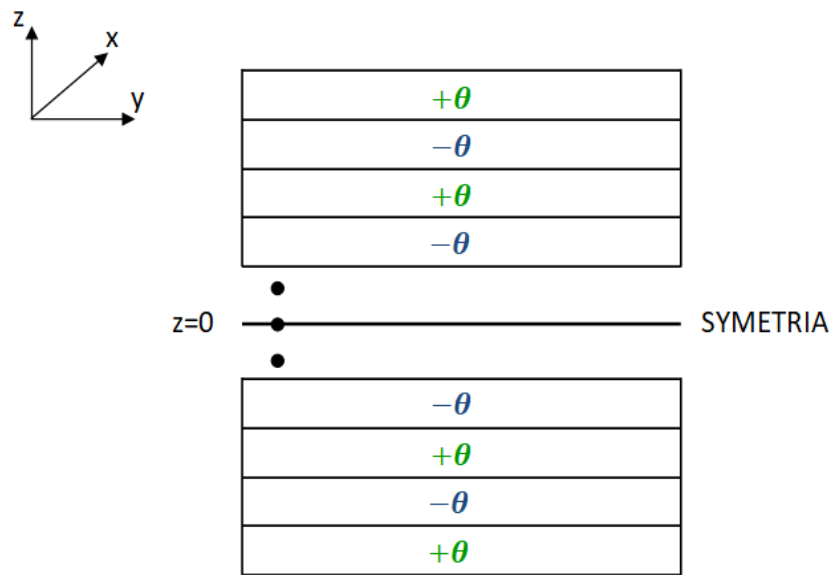
jednokierunkowymi laminatami kompozytowymi. Taki sam wniosek, został sformułowany później w literaturze [149-158]. Stodieck i współpracownicy [151] ocenili potencjalną oszczędność masy skrzydła w przypadku pełnowymiarowego skrzydła dopasowanego aeroelastycznie. Badania pokazały, że zoptymalizowane laminaty typu „tow-steered” osiągają znacznie lepszą redukcję masy niż zoptymalizowane kompozyty z włóknami prostymi. Haddadpour i Zamani [152] badali aeroelastyczne projektowanie skrzydeł kompozytowych z zakrzywionymi włóknami, które modelowano jako belki cienkościennie. Skrzydło zostało zoptymalizowane za pomocą liniowej zmiany orientacji włókna w celu maksymalizacji prędkości niestabilności aeroelastycznej. Wykazano, że znaczną poprawę stabilności aeroelastycznej uzyskuje się dzięki zastosowaniu skrzydeł o optymalnej zmiennej sztywności w porównaniu do konwencjonalnych skrzydeł o stałej sztywności. Stanford i współpracownicy [153] badali aeroelastyczne dopasowanie płaskiej płyty dla niskich prędkości przepływu płynu przy użyciu algorytmu genetycznego. Guimarães i współpracownicy [154] ocenili zachowanie flatteru dla płyt kompozytowych typu „tow-steered” metodą Ritza w połączeniu z naddźwiękową aerodynamiczną teorią typu „piston”. Porównano również granice stabilności flatteru dla laminatów o stałej sztywności oraz zmiennej sztywności. Akhavan i Ribeiro [155] badali niestabilność aeroelastyczną laminatów kompozytowych o zmiennej sztywności w naddźwiękowym przepływie płynu. Do modelowania strukturalnego i aerodynamicznego wykorzystano odpowiednio, teorię odkształceń ścinania trzeciego rzędu i liniową teorię typu „piston”. Do dyskretyzacji modelu aerodynamicznego zastosowano metodę elementów skończonych p-wersję. Zbadano wpływ warunków brzegowych, kątów włókien i kierunku przepływu powietrza na występowanie flatteru i dywergencji. Khalafi i Fazilati [156] opracowali udoskonaloną izogeometryczną metodę elementów skończonych do badania drgań swobodnych i liniowej charakterystyki flatteru zmiennych sztywności płyt laminowanych kwadratowych i skośnych. Ich wyniki porównano z wynikami z literatury w celu weryfikacji dokładności i skuteczności. Z kolei Ouyang i Liu [157] badali nieliniowe zachowanie flatteru laminatów kompozytowych typu „tow-steered” w warunkach dużego naddźwiękowego przepływu metodą elementów skończonych oraz zbadali wpływ warunków brzegowych i orientacji włókien na nieliniowe zachowanie flatteru.

4.3.2. Optymalizacja konfiguracji laminatu

Zgodnie z podejściem zaproponowanym w pracy Muc [76] zmienne decyzyjne opisujące konfiguracje laminatu mogą przyjmować postać ciągłą lub dyskretną (rysunek 4.1). Jak podano w pracy Muc [41] wybór parametrów określających konfigurację laminatu jest w zasadzie dowolny. W niniejszej pracy rozważane będą następujące przypadki:

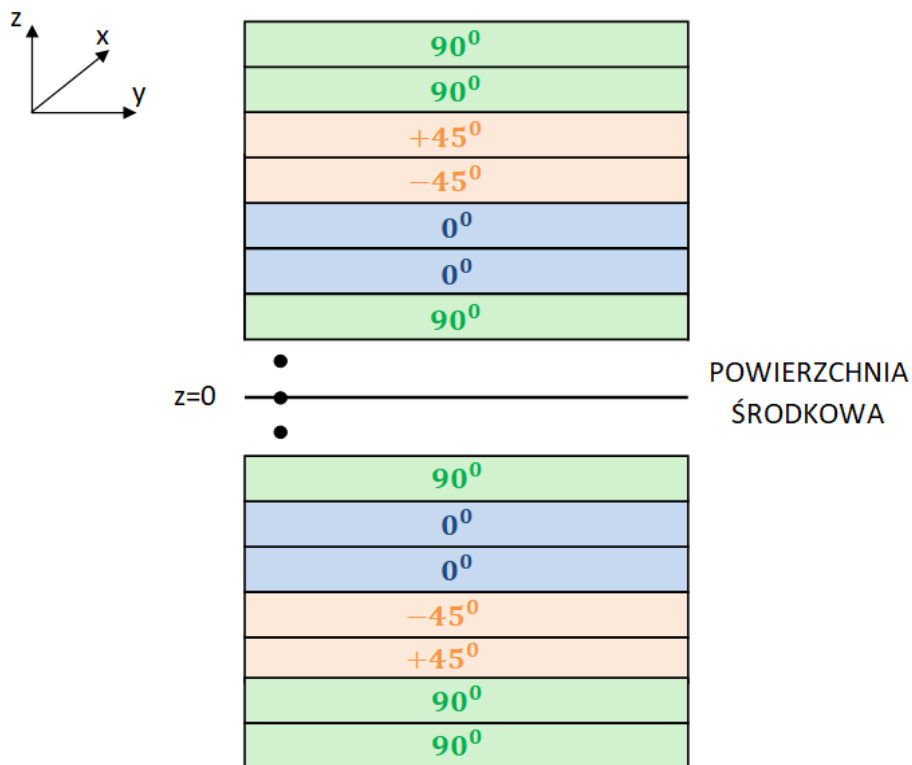
1. Konfiguracja typu „angle-ply” (kątowna), dla której rozważamy tylko symetryczne konfiguracje laminatu o parzystej liczbie warstw, w której każda z warstw ma orientację $\pm\theta$; zgodnie z dyskusją przedstawioną w pracy Muc [76] odpowiada to sytuacji pokazanej graficznie na rysunku 4.3.

Przyjmujemy ponadto, że współczynniki macierzy sztywności ((2.12) - (2.14)) upraszczają się, ponieważ $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ oraz $B_{ij} = 0$. Dwa elementy w macierzy sztywności [B] nie są równe zeru (B_{16} i B_{26}), ale efekty sprzężenia mogą być pominięte w przypadku dużej liczby warstw N. Zgodnie z definicją (2.27) oraz (2.12) - (2.14) konfiguracja laminatu może być wyrażona przez jedną ciągłą zmienną decyzyjną θ należącą do przedziału $0^{\circ} - 90^{\circ}$.



Rys. 4.3. Symetryczna konfiguracja laminatu typu „angle – ply”

2. Konfiguracja dyskretna dla laminatów symetrycznych względem powierzchni środkowej – orientacja włókien $[0_2^0, \pm 45_2^0, 90_2^0]_s$ pokazana graficznie na rysunku 4.4.



Rys. 4.4. Dyskretna orientacja włókien symetryczna względem powierzchni środkowej

Możliwe jest zredukowanie całkowitej liczby zmiennych decyzyjnych poprzez wprowadzenie par o dyskretnej orientacji włókien (każda z warstw ma identyczną grubość h/N):

- 3 zmiennych dyskretnych $[0_2^0, \pm 45^0, 90_2^0]_s$;
- lub 7 zmiennych dyskretnych $[0_2^0, \pm 15^0, \pm 30^0, \pm 45^0, \pm 60^0, \pm 75^0, 90_2^0]_s$.

W przypadku laminatów o orientacji kątovej niezerowe warunki w macierzach sztywności ($A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}$ oraz $D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}$) są funkcjami $\cos(2\theta)$, a wartość $\cos(2\theta)$ jest traktowana jako zmienna decyzyjna s . Dla dyskretnej orientacji włókien całkowita liczba zmiennych decyzyjnych wzrasta do $3^{N/4}$ i odpowiada wszystkim kombinacjom par warstw w laminacie symetrycznym. Muc [159, 160] zaproponował zmniejszenie powyższej liczby tylko do czterech poprzez zastosowanie następujących wartości:

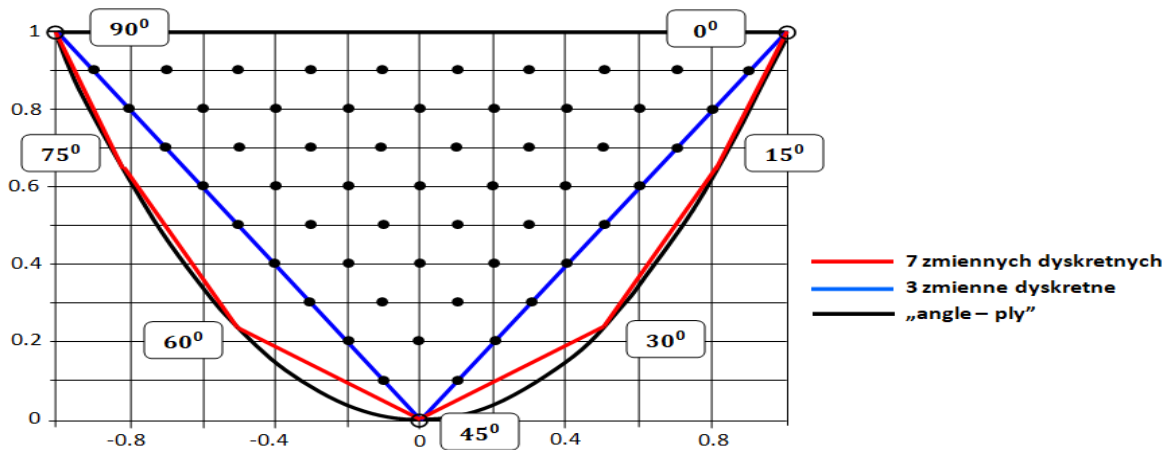
$$x_{1A} = \frac{4}{N} \sum_{i=1}^{N/4} i(\theta = 0^0) \quad x_{2A} = \frac{4}{N} \sum_{i=1}^{N/4} i(\theta = 90^0)$$

$$x_{1D} = \left(\frac{4}{N}\right)^3 \sum_{i=1}^{N/4} [3i(i-1)+1](\theta = 0^0) \quad x_{2D} = \left(\frac{4}{N}\right)^3 \sum_{i=1}^{N/4} [3i(i-1)+1](\theta = 90^0)$$
(4.17)

Ponieważ elementy $A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}$ są jedynie funkcjami $\sin(2\theta)$ dlatego mogą być wyrażone poprzez powyższe zmienne, biorąc pod uwagę następujące założenia:

$$x_{1A} + x_{2A} + \frac{4}{N} \sum_{i=1}^{N/4} i(\theta = 45^0) = 1 \quad x_{1D} + x_{2D} + \left(\frac{4}{N}\right)^3 \sum_{i=1}^{N/4} [3i(i-1)+1](\theta = 45^0) = 1$$
(4.18)

Zgodnie z wprowadzoną klasyfikacją w teorii optymalnego projektowania, funkcje parametrów $x_{1D}, x_{2D}, x_{1A}, x_{2A}$ charakteryzujących konfiguracje laminatu nazywane są funkcją płaszczyzny. Funkcja ta została pokazana w sposób graficzny na rysunku 4.5. W celu scharakteryzowania obu typów zmiennych decyzyjnych (tj. kątovej i dyskretnej) wprowadza się dwie płaszczyzny (x_{1A}, x_{2A}) i (x_{1D}, x_{2D}). W tym przypadku, kątovej orientacje włókien („angle-ply”) są zilustrowane poprzez jedną krzywą (parabola), natomiast orientacje dyskretnej włókien przez części płaszczyzny odcięte przez trójkąt (dla 3 zmiennych) oraz wielokąt (dla 7 zmiennych).



Rys. 4.5. Płaszczyzna decyzyjna dla dyskretnej i ciągłej orientacji włókien

Zmienne decyzyjne (x_{1A}, x_{2A}) i (x_{1D}, x_{2D}) nie są niezależne, jednak jak wykazano w literaturze [161], nie ma unikalnego mapowania między dwiema parami zmiennych. W swojej procedurze optymalizacji Li, Narita [20] przeanalizowali granicę funkcji płaszczyzny wykreślonej na rysunku 4.5, tj. paraboli i laminatów kątowych. Dla płyt trójkątnych Hirano, Todoroki [121, 122] oraz dla płyt prostokątnych Kameyama, Fukunaga [35] ocenili granice flatteru w punktach dyskretnych wewnątrz i na granicach trójkąta (rysunek 4.5), wykorzystując jedynie sztywność zginania (x_{1D}, x_{2D}) .

W przypadku zmiennych dyskretnych $x_{1D}, x_{2D}, x_{1A}, x_{2A}$ analizę będziemy przeprowadzali tylko na płaszczyznach $x_{1D} - x_{2D}$ oraz $x_{1A} - x_{2A}$.

4.3.3. Funkcjonalne materiały gradientowe (FGM) i struktury nanokompozytowe (NK)

Liczne badania od 2000 roku poświęcone były analizie flatteru struktur wykonanych z funkcjonalnych materiałów gradientowych (FGM) [158, 162-184] i nanokompozytów (NK) [185-199]. W tym obszarze, badania parametryczne (nie zawsze optymalne poszukiwanie rozwiązań), zajmowały się analizą charakterystyki flatteru dla struktur, zwłaszcza pod kątem ochrony termicznej.

Sztywność i rozkład masy skrzydła lub struktury łopatek mają wpływ na właściwości aerostatyczne konstrukcji. Funkcjonalne materiały gradientowe (FGM) i nanokompozyty (NK) mają właściwości zmieniające się w sposób ciągły dzięki przestrzennie zróżnicowanemu rozkładowi dwóch (lub więcej) materiałów. Materiały FGM/NK umożliwiają zmiany sztywności struktury, rozkładu termicznego i masowego bez konieczności wprowadzania zmian geometrycznych w konstrukcji.

Większość prac poświęcona jest badaniu charakterystyki flatteru i aerodynamicznych możliwości paneli prostokątnych dla struktur ceramiczno-metalowych – odniesienia [158, 163-169, 171, 175, 177, 180, 182, 184]. W dwóch publikacjach [172, 180] przeprowadzono podobną analizę, jak w poprzednich pracach, dla struktur belkowych oraz w jednej [183] dla rur transportujących ciecz. Badania koncentrowały się głównie na problemach ochrony termicznej i ograniczały się do rozważań parametrycznych.

W licznych odniesieniach przedstawionych w tej części rozprawy tylko w dwóch pracach [170, 171] autorzy zastosowali algorytmy optymalizacji w celu szczegółowego zbadania zachowania flatteru. Peng i Xiaoping [170] analizowali prostokątne struktury warstwowe z laminowanymi płytami czołowymi i rdzeniem FGM z trzema rodzajami gradacji liniowej. Autorzy przeprowadzili optymalne projektowanie płyt czołowych z wykorzystaniem parametrów laminacji. Dunning i współpracownicy [171] zastosowali podobną strategię gradacji jak w poprzednich pracach, aby zoptymalizować aeroelastyczne właściwości stopu aluminium i płyty wspornikowej AlSiC. Autorzy zaimplementowali algorytmy genetyczne oraz metodę Pareto.

W ostatnim czasie, badano również zachowania naddźwiękowego flatteru struktur nanokompozytowych (NK). Ogólnie rzecz biorąc, analiza wykazała konieczność zastosowania teorii poprzecznego ścinania wyższego rzędu w celu prawidłowej oceny form drgań – odniesienie w literaturze [185-188].

4.4. Geometryczne zmienne decyzyjne

Skrzydła są najbardziej krytycznymi elementami w systemach konstrukcji samolotów. Ogólnie rzecz biorąc, problemy napotymane w tej dziedzinie związane są z geometryczną reprezentacją dwóch parametrów:

- (1) Parametrów sekcji skrzydeł;
- (2) Parametrów profilu skrzydeł.

W celu zmniejszenia złożoności i kosztów procesu optymalizacji konieczne jest wprowadzenie odpowiedniej parametryzacji. W pracach [200, 201] wykazano, że rozkłady wyżej wymienionych zmiennych decyzyjnych można zapisać jako krzywe 2D reprezentujące nie tylko kształt krawędzi struktury lub jej powierzchni środkowej, ale również optymalizację wymiarową (np. grubości) lub optymalizację topologii (rozkłady: gęstości, frakcji objętościowej składników lub materiału o różnym module Younga). Ogólna metoda konstruowania krzywych na płaszczyźnie $x - y$ została szczegółowo przedstawiona za pomocą funkcji klejonych różnego typu, a wprowadzenie teoretyczne zostało uzupełnione o numeryczne rozwiązania różnych problemów. Warto wspomnieć, że Skinner i Zare-Behtash [202] omówili w inny sposób najnowsze metody optymalizacji kształtu aerodynamicznego przedstawione w niniejszej pracy.

4.4.1. Parametry przekroju poprzecznego - zmienna (stopniowana) grubość

Przekrój poprzeczny skrzydła charakteryzują liczne parametry opisujące nie tylko wielkość profilu (grubość powłoki, pole przekroju dźwigara lub żeber), ale także jego kształt (prostokątny, paraboliczny), rozmieszczenie żeber/dźwigarów oraz całkowitą liczbę dźwigarów/zeber – patrz odnośniki [203-206]. Podstawowym celem analizy jest zaprojektowanie rozkładu grubości spełniającego kryterium (4.15) (minimalny ciężar konstrukcji). Przeprowadzono szereg badań w tym zakresie. Rozwiązania dla n problemów optymalizacji przedstawiono w literaturze [35, 207-209]. Podobną analizę przeprowadzono dla kompozytowych skrzydeł wirnika (skomplikowane kształty łopatek) – literatura [210-214].

4.4.2. Rodzaj struktury

Charakterystyki aeroelastyczne struktur poddźwiękowych i naddźwiękowych analizowane są dla różnych postaci dwuwymiarowych powierzchni środkowych oraz rodzajów obciążeń i warunków brzegowych. W tym podrozdziale zostaną wyróżnione podstawowe rodzaje struktur rozpatrywane w literaturze oraz zostaną przedstawione dodatkowe odniesienia poświęcone analizie strukturalnej, ale nie zawsze problemom optymalizacji w omawianym obszarze.

Zazwyczaj, ze względu na zachowanie aeroelastyczne, badane są następujące konstrukcje:

- Belki – odniesienia w literaturze [215-223];
- Płaskie płyty (trójkątne, prostokątne, trapezowe) – odniesienia [224-229];

- Panele: cylindryczne [230-234], sferyczne [235, 236], ścięte stożkowe [237-240];
- Powłoki cylindryczne – odniesienia [241-244].

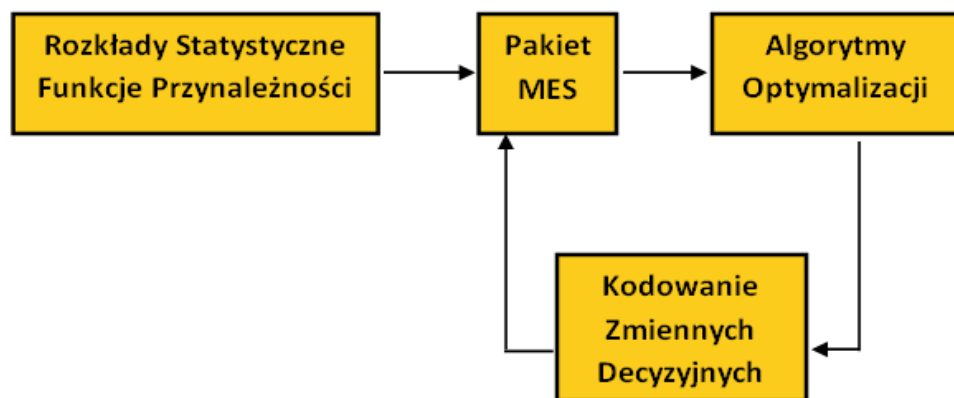
Przegląd przedstawiony w powyższych podrozdziałach miał na celu pokazać zróżnicowane podejście w analizie problemów optymalizacji w zależności od typów analizowanych struktur.

4.5. Algorytmy optymalizacji

W optymalizacji problemów aerothermoelastycznych można zastosować różne algorytmy optymalizacji. Zazwyczaj, jakość zoptymalizowanego projektu zależy od jakości punktu wyjścia. W celu poprawy jakości projektu wstępnego lepiej jest więc stosować metody bezgradientowe/heurystyczne, takie jak np. algorytmy genetyczne, algorytmy ewolucyjne, metody optymalizacji roju cząstek lub symulowane wyżarzanie – patrz Muc [92, 147, 159]. Nie oczekuje się, że poprawi to (skróci) czas obliczeniowy potrzebny do poszukiwania, ale konieczne jest uzyskanie lepszych wartości niż dla punktów wyjścia (niekoniecznie optymalnych globalnie) funkcji/funkcjonału celu.

Dużo wysiłku włożono we wprowadzenie i zastosowanie efektywnych algorytmów optymalizacji w projektowaniu laminowanych dwu- lub trójwymiarowych struktur panelowych i powłokowych. Z drugiej strony, ze względu na anizotropię i niejednorodność, struktury te wykazują dość skomplikowane stany naprężeń i odkształceń tak, że w ostatnich latach opracowano kilka odpowiednich modeli mechanicznych dla struktur kompozytowych – patrz np. [8, 245]. Modele te mogą być jednak z powodzeniem wdrażane do problemów optymalizacji za pomocą procedur MES kiedy podejście analityczne jest niemożliwe (np. dla skomplikowanych obciążeń i warunków brzegowych) lub może prowadzić do bardzo skomplikowanych wzorów. Taka analiza została przeprowadzona przez autora i przedstawiona w literaturze [9, 246].

W niniejszej pracy uwaga zostanie skupiona na rozszerzeniu analizy optymalizacji na obszar niepewności właściwości mechanicznych materiałów kompozytowych. Zostanie ona przeprowadzona z wykorzystaniem zestawu rozmytego – szczegóły formułowania różnych problemów mechanicznych kompozytów w środowisku zestawu rozmytego zostały przedstawione w pracy [7].



Rys. 4.6. Wykres ogólnego, numerycznego schematu optymalizacji

Jednolite, spójne podejście do różnych problemów optymalizacji w środowisku rozmytym opiera się na odpowiednim połączeniu czterech elementów:

- (1) Definicja i kodowanie zmiennych decyzyjnych opisujących analizowane struktury;
- (2) Algorytmy optymalizacji;
- (3) Pakiet MES;
- (4) Zestaw rozmyty formułujący zmienność (niepewność) właściwości mechanicznych.

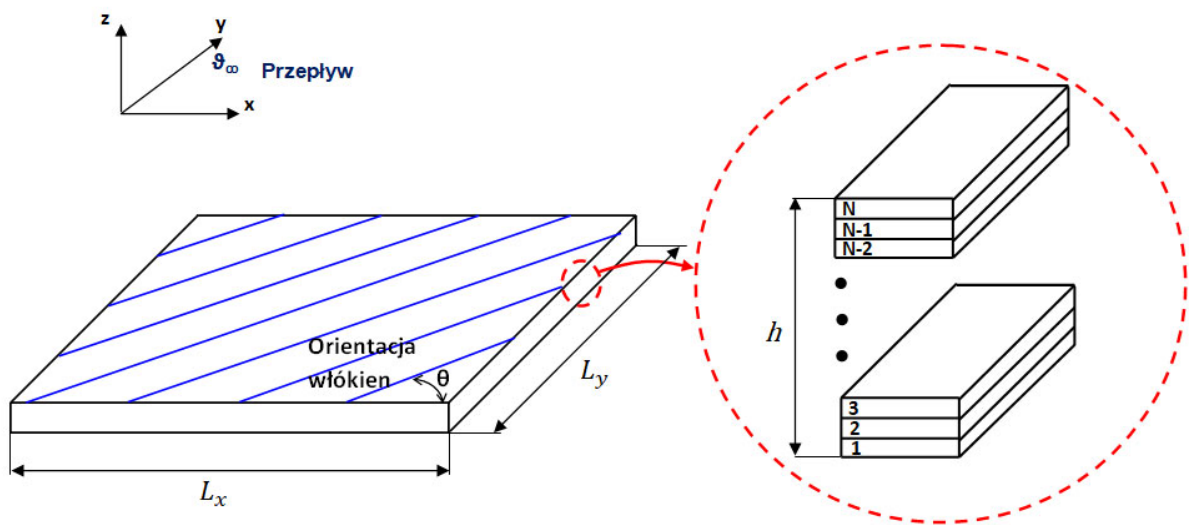
Ten ostatni problem (4) sformułowany jest przy użyciu odpowiednich funkcji przynależności. Wszystkie wyżej wymienione elementy są lub mogą być formułowane niezależnie i to jest istotną zaletą proponowanego podejścia, ponieważ przy zastosowaniu wprowadzonej metodologii możliwe jest formułowanie i rozwiązywanie zupełnie innych problemów optymalizacji. Schemat blokowy ogólnej metody optymalizacji z wykorzystaniem metody numerycznej MES został przedstawiony na rysunku 4.6.

5. PROJEKTOWANIE PŁYT KOMPOZYTOWYCH

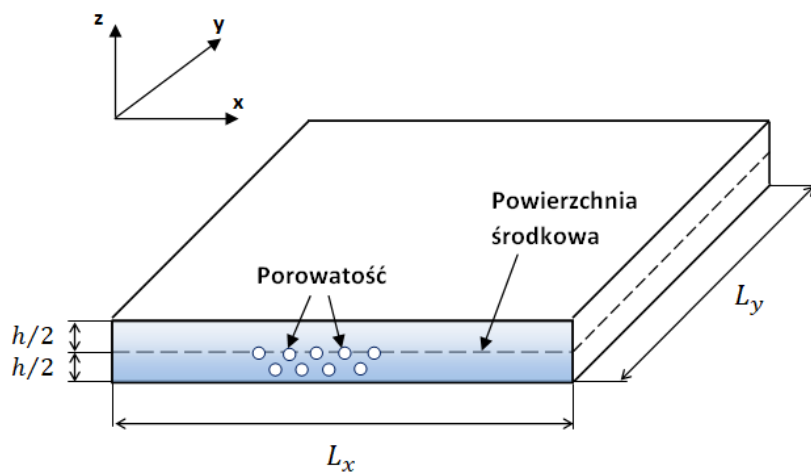
Przegląd literatury dotyczący badań z zakresu projektowania płyt kompozytowych można znaleźć w niniejszej rozprawie w rozdziałach 1.3, 4.2.1 oraz 4.3.1.

Analizie zostały poddane dwa rodzaje płyt kompozytowych:

- Wielowarstwowe płyty laminowane – rysunek 5.1(a);
- Płyty porowate wykonane z funkcjonalnych materiałów gradientowych (FGM) – rysunek 5.1(b).



(a)



(b)

Rys. 5.1. Geometria: (a) wielowarstwowych płyt laminowanych; (b) płyt porowatych FGM

5.1. Relacje podstawowe

W analizie laminowanych płyt zakłada się, że:

- 1 W opisie płyt zastosowano hipotezę Love'a-Kirchhoffa (*classical plate theory* CPT) oraz teorię poprzecznego ścinania pierwszego rzędu (*first order transverse shear deformation theory* FSDT);
- 2 Nieliniowe relacje odkształcenie-przesunięcie są związane z teorią płyty von Karmana;
- 3 Płyta poddana jest obciążeniu jednorodnej temperatury ΔT ;
- 4 Obciążenie ciśnienia aerodynamicznego Δp spełnia warunki quasi-stałej naddźwiękowej teorii typu „piston”;
- 5 Relacje konstytutywne opisane są wzorami (2.5) (wielowarstwowe laminaty) oraz (2.11) (porowate materiały funkcjonalne).

W rozdziale 2 niniejszej pracy zostały przedstawione podstawowe wzory i relacje w przypadku materiałów kompozytowych (MK oraz FGM). I tak, odkształcenia całkowite $\{\varepsilon(x, y, z)\}$, odkształcenia błonowe $\{\varepsilon_{ij}^{(m)}(x, y, z)\}$ i wektory krzywizny $\{\kappa(x, y, z)\}$ otrzymuje się przez równanie (2.34). Relacje konstytutywne są opisane równaniem (2.15). Poszczególne składowe macierze sztywności A, B i D zostały zdefiniowane równaniami (2.12) - (2.14). Równania opisujące energię potencjalną (2.24) i kinematyczną (2.25) układu oraz pracę wykonaną przez aerodynamiczne (2.26) i termo-mechaniczne obciążenia (2.27) również zostały przedstawione i omówione w rozdziale 2. Ponadto, odniesiono się do właściwości porowatych materiałów funkcjonalnych (FGM).

Dalsza analiza przeprowadzana jest przy założeniu liniowej analizy wyboczenia, tak że wszystkie nieliniowe warunki w funkcjonale U_L są równe zero.

Podstawowy układ równań można wyprowadzić z zasady Hamiltona i przedstawia go wzór (2.28). Równanie (2.28) prowadzi do układu dwóch liniowych równań różniczkowych czwartego rzędu dla dwóch zmiennych: przemieszczenia normalnego w i funkcji Airy'ego. W przypadku płaskich płyt, stany błonowe i zginania są rozdzielone w analizie drgań swobodnych oraz analizie flutteru, dlatego podstawowe relacje są zredukowane do analizy relacji tylko dla przemieszczeń poza płaszczyznę w . Szczegółowe omówienie tego problemu można znaleźć w literaturze [247].

5.2. Częstotliwości drgań swobodnych

5.2.1. Wielowarstwowe płyty laminowane

Ważną klasą problemów w analizie flutteru są drgania swobodne układów. W rozdziale 4.2.1 przedstawiono krótki przegląd literatury dla tego zagadnienia w przypadku struktur kompozytowych.

Przeprowadzając analizę drgań swobodnych przyjmuje się, że macierz tłumiąca równa się zero oraz, że nie występuje żadna siła zewnętrzna działająca na układ. Jest to uogólniony problem wartości, ponieważ rozwiązania są zawsze rzeczywiste i dodatnie, jeśli siły ciśnienia aerodynamicznego są równe zero.

Analizę drgań swobodnych dla prostokątnych laminowanych płyt przeprowadził w swojej pracy Muc [76]. Jak podkreślił autor, dla swobodnie podpartych płyt (SSSS) podstawowe częstotliwości mogą być zapisane za pomocą poniższej zależności (przy zastosowaniu metody Rayleigha-Ritza):

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{\rho} \left[D_{11} \left(\frac{m}{L_x} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{mn}{L_x L_y} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{L_y} \right)^4 \right] \quad (5.1)$$

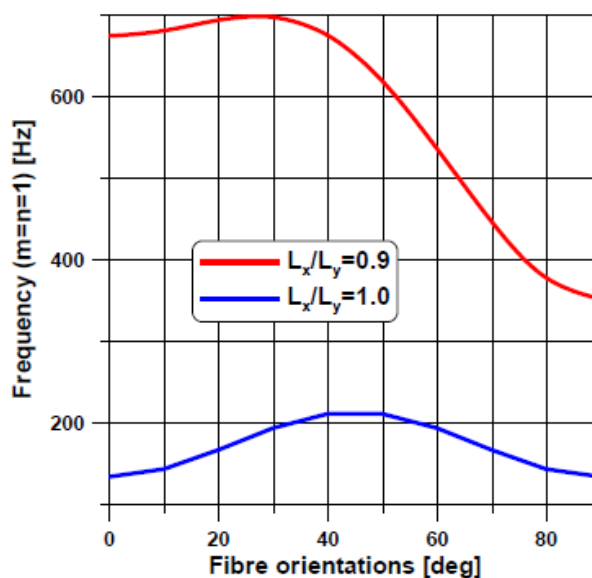
przy czym $A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = 0$.

W pracy [76] jako przykład obliczeniowy, autor zastosował kompozyt grafitowo-epoksydowy o właściwościach materiałowych podanych w tabeli 5.1.

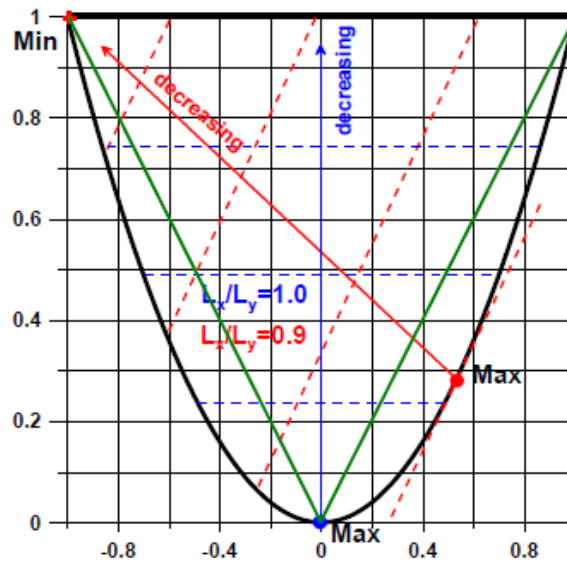
Tabela 5.1. Właściwości kompozytu grafitowo-epoksydowego

E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}	ρ [kg/mm ³]
98.00	7.90	5.60	0.28	1520

Rozkład pierwszej częstotliwości własnej w zależności: orientacja warstwy dla symetrycznej konfiguracji laminatu typu „angle-ply” (kątovej), a pierwsza forma częstotliwości drgań swobodnych ($m = n = 1$) został przedstawiony na rysunku 5.2. Wartość maksymalnej częstotliwości podstawowej zmienia się w zależności od stosunku geometrycznego L_x/L_y . Jak można zauważyć, maksimum występuje przy orientacji włókien $\theta = 0^\circ$ dla $L_x/L_y < 0.7$. Wzrost stosunku L_x/L_y powoduje wzrost maksymalnej orientacji włókien do wartości $\theta = 90^\circ$ przy $L_x/L_y = 1.4$. Dla założonej wartości stosunku L_x/L_y , maksymalna częstotliwość leży na paraboli $y = x^2$, a linia prosta jest styczna do paraboli – patrz rysunek 5.3. Nachylenie linii konturowych zależy od położenia maksimum.



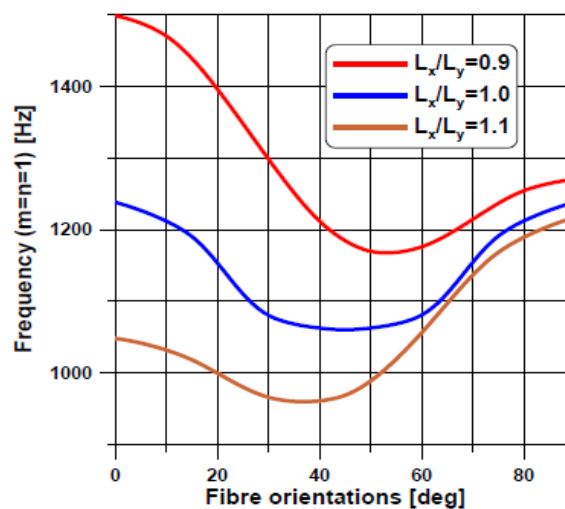
Rys. 5.2. Rozkład częstotliwości własnych dla płyt o orientacji kątovej – swobodne podparcie (SSSS)



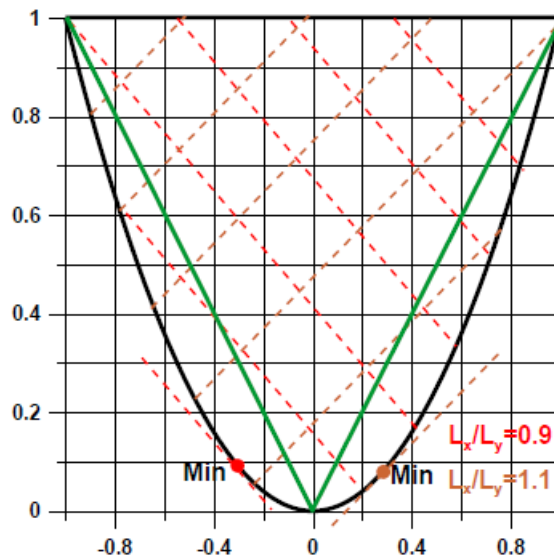
Rys. 5.3. Kontury częstotliwości własnych na płaszczyźnie x, y dla płyt o orientacji kątowej oraz symetrycznej – swobodne podparcie (SSSS)

Wyniki analiz wykreślone na rysunkach 5.2 oraz 5.3 są porównywalne z wynikami analizy metodą elementów skończonych (MES) przeprowadzanej przy użyciu elementów oznaczonych jako NKTP 32 (program FE NISA II wersja 17 [248]). Zielony trójkąt na rysunku 5.3 pokazuje granice płaszczyzn decyzyjnych w przypadku trzech zmiennych dyskretnych.

Zmiana warunków brzegowych ze swobodnie podpartych krawędzi (SSSS) na utwierdzone (CCCC) prowadzi do zmiany położenia maksymalnych i minimalnych częstotliwości własnych. Maksimum występuje zawsze dla włókien o orientacji $\theta = 0^\circ$ lub $\theta = 90^\circ$. Minimalna częstotliwość własna znajduje się wewnątrz przedziału $(0^\circ, 90^\circ)$ a jej położenie zależy od wartości stosunku L_x/L_y . W miarę wzrostu wartości L_x/L_y położenie wartości minimalnej przesuwa się z $\theta = 90^\circ$ do $\theta = 0^\circ$ oraz $\theta = 45^\circ$ dla $L_x/L_y = 1$. Wyniki częstotliwości własnych dla płyt utwierdzonych (CCCC) zostały przedstawione na rysunkach 5.4 oraz 5.5.



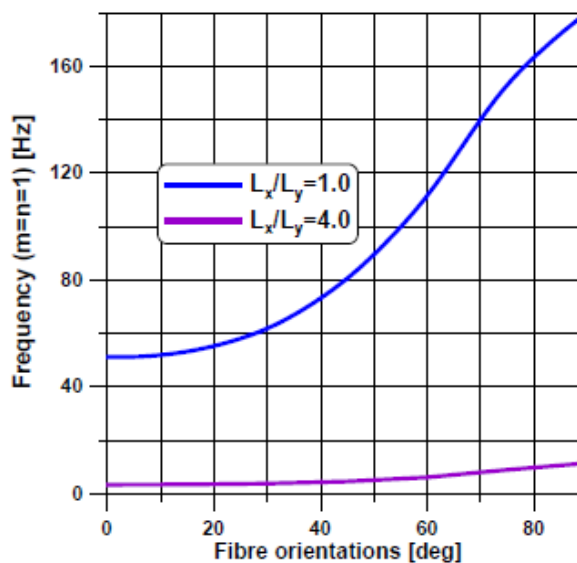
Rys. 5.4. Rozkład częstotliwości własnych dla płyt o orientacji kątowej – krawędzie utwierdzone (CCCC)



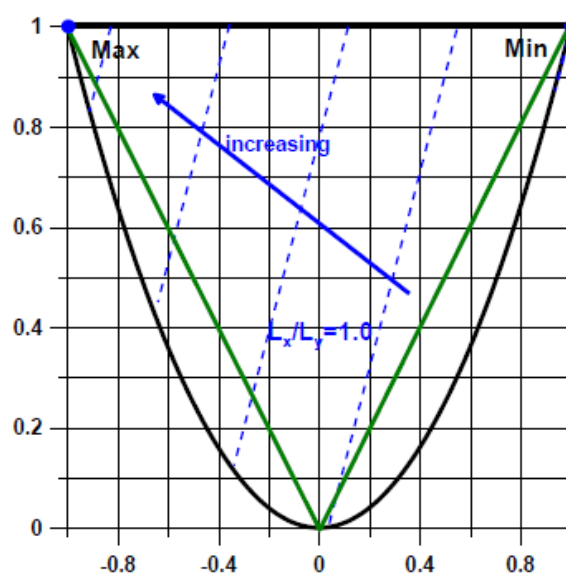
Rys. 5.5. Kontury częstotliwości własnych na płaszczyźnie x, y dla płyt o orientacji kątovej oraz symetrycznej – krawędzie utwierdzone (CCCC)

Wyniki numeryczne pokazują, że wykresy konturowe są reprezentowane przez linie proste, a maksymalne/minimalne częstotliwości własne leżą na krawędziach paraboli (konfiguracja „angle-ply”).

Kolejny problem dotyczy analizy swobodnych krawędzi (FFFC) płyt prostokątnych, które odnoszą się bezpośrednio do analizy aeroelastycznej dla skrzydeł kompozytowych stosowanych w konstrukcjach samolotów. Przeprowadzona analiza numeryczna wykazała, że globalne minimum/maksimum istnieje niezależnie od współczynnika kształtu płyty. Maksymalne częstotliwości własne występują dla płyt o orientacji włókien $\theta = 90^\circ$, natomiast minimalne częstotliwości dla orientacji $\theta = 0^\circ$. Wyniki zostały zaprezentowane na rysunkach 5.6 oraz 5.7.



Rys. 5.6. Rozkład częstotliwości własnych dla płyt o orientacji kątovej – swobodne krawędzie (FFFC)



Rys. 5.7. Kontury częstotliwości własnych na płaszczyźnie x, y dla płyt o orientacji kątowej oraz symetrycznej – swobodne krawędzie (FFFC)

Podobnie, jak w przypadku płyt utwierdzonych, wykresy konturowe są reprezentowane przez linie proste, a maksymalne/minimalne częstotliwości własne leżą na krawędziach paraboli (konfiguracja „angle-ply”).

5.2.2. Płyty wykonane z porowatych funkcjonalnych materiałów gradientowych (FGM)

Drgania swobodne dla płyt prostokątnych wykonanych z FGM i posiadających swobodnie podparte dwie przeciwległe krawędzie mogą być przedstawione za pomocą poniższej relacji:

$$\lambda^{FGM} = (r_m^2 - \pi^2 k^{FGM})^2 \quad (5.2)$$

gdzie:

$$k^{FGM} = \frac{1}{D^{unif}} \left(\frac{L_x n}{L_y} \right)^2, \quad \lambda^{FGM} = \rho^{unif} \omega^2 \hat{M} \frac{L_x^4}{D^{unif}}, \quad (5.3)$$

$$D^{unif} = \frac{E_b h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \rho^{unif} = \rho_b h(1 - c_p)$$

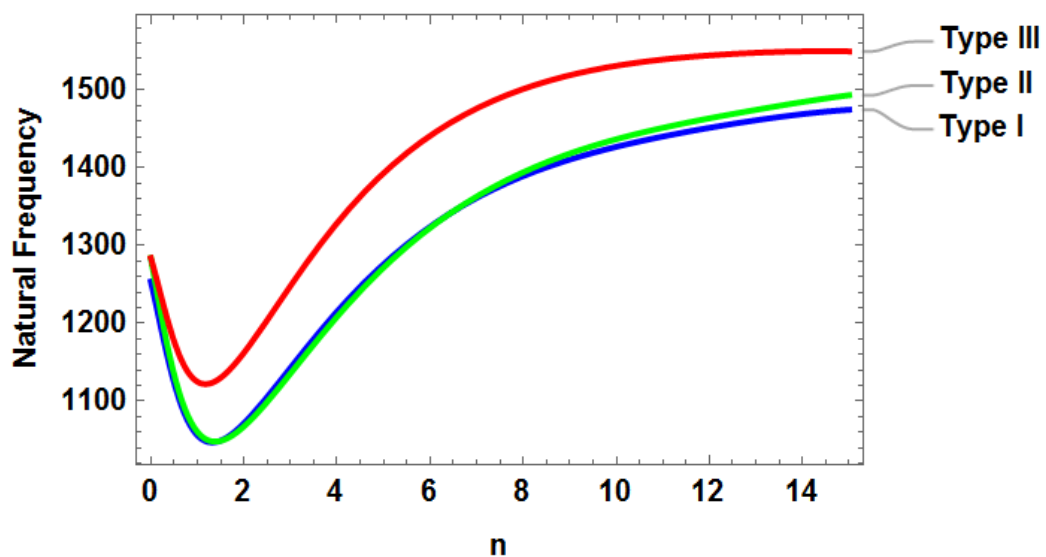
przy czym r_m to pierwiastek charakterystyczny równania (3.22), a symbol „unif” odpowiada jednolitej porowatości materiału – rysunek 2.6(a).

Zauważmy, że dla płyt izotropowych identyczne relacje wprowadził w 1961 roku Bolotin [7], a następnie w 1973 roku Leissa [249]. Dokładne wartości analityczne częstotliwości drgań własnych podano w tabeli 5.2. Wartości te podano dla sześciu warunków brzegowych omówionych w rozdziale 3.2. Zazwyczaj w analizie stosuje się krawędzie utwierdzone (CCCC), tak aby ostatnie wartości były oceniane numerycznie (metoda Rayleigha-Ritza).

Tabela 5.2. Wartości bezwymiarowych częstotliwości drgań własnych dla płyt izotropowych $\omega^2 D / (\rho h L_x^4)$ [249]

	SSSS	SCSC	SCSS	SCSF	SSSF	SFSF	CCCC
$\omega_{(1)}^2$	$4\pi^4$	838.135	559.13	160.96	136.54	92.76	1295.21
$\omega_{(2)}^2$	$25\pi^4$	2996.9	2670.20	1093.29	770.40	260.34	5389.03

Szersze omówienie problemów związanych z częstotliwościami własnymi płyt prostokątnych przedstawia Muc [76]. Rysunek 5.8 ilustruje wpływ właściwości materiału na częstotliwości drgań własnych dla płyt wykonanych z FGM. Jak można zauważyć, wykładnik potęgowy n odgrywa zasadniczą rolę w spadku lub wzroście częstotliwości drgań własnych. Autorzy pracy [250] informowali o spadku częstotliwości własnych wraz ze wzrostem współczynnika n . Całkowicie pominęli jednak wpływ funkcji $\psi(z)$ w równaniach (2.16), która może mieć stabilizujący lub destabilizujący wpływ na oddziaływanie wartości częstotliwości drgań własnych dla płyt wykonanych z FGM. Rodzaj porowatości materiału (symetryczna lub niesymetryczna – zależności (2.17)-(2.20)) również może zmieniać rozkłady częstotliwości własnych. Zmiany rozkładów częstotliwości drgań własnych są zgodne z przewidywaniami teoretycznymi określonymi przez współczynnik korekcyjny.

Rys. 5.8. Pierwsza bezwymiarowa częstotliwość własna kwadratowej płyty FGM (SSSS), zmiany porowatości wzdłuż kierunku grubości – $P_t/P_b = 5$, $c_p = 0.2$

5.3. Maksymalizacja wartości ciśnienia aerodynamicznego

5.3.1. Rozwiązanie metodą analityczną

Zarówno dla płyt izotropowych, jak i anizotropowych charakterystyczne równanie algebraiczne można zapisać w następujący sposób:

$$(r_m^2 - \pi^2 k)^2 + \beta r_m - \lambda = 0 \quad (5.4)$$

gdzie:

(1) Wielowarstwowe laminaty:

$$k^{LAM} = \frac{L_x^2}{m^2 D_{11}} \left[(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 + \frac{N_x^0}{2\pi^2} \right], \quad \beta^{LAM} = \frac{L_x^3}{m^3 D_{11}} \Lambda,$$

$$\lambda^{LAM} = \frac{L_x^4}{m^4 D_{11}} \left[\rho h \omega^2 - D_{22} \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 - N_y^0 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right] - 4\pi^4 (k^{LAM})^2, \quad (5.5)$$

$$m, n = 1, 2, \dots$$

(2) Funkcjonalne materiały gradientowe FGM:

$$\beta^{FGM} = \frac{L_x^3}{D^{unif}} M \Lambda, \quad M = \frac{AD^{unif}}{-B^2 + AD}, \quad \hat{M} = \frac{\hat{\rho}}{\rho^{unif}} M, \quad Q_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2},$$

$$A = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} dz, \quad B = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} z dz, \quad D = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} z^2 dz, \quad \hat{\rho} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz, \quad (5.6)$$

przy czym k^{FGM} , λ^{FGM} , D^{unif} oraz ρ^{unif} zostały opisane wzorem (5.3). Natomiast r_m to pierwiastek charakterystyczny równania (3.22).

Wpływ właściwości mechanicznych FGM jest wyrażony za pomocą dwóch mnożników M i \hat{M} . Dla materiału izotropowego, izotermicznego i przy założeniu, że $D = D^{unif}$, $\rho = \rho^{unif}$ są one równe 1.

Dla wielowarstwowych laminatów oraz płyt wykonanych z FGM rozwiązania można zapisać jako:

$$r_{1,2} = \zeta \pm i\nu, \quad r_{3,4} = -\zeta \pm \sqrt{2k\pi^2 + \nu^2 - 2\zeta^2}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (5.7)$$

i są one funkcjami jedynie dwóch parametrów, tj. ζ oraz ν . Parametry β i λ są wyrażone poniżej:

$$\beta = 4\zeta(\nu^2 - \zeta^2 + k\pi^2), \quad \lambda = k^2\pi^4 + (\nu^2 + \zeta^2)(\nu^2 - 3\zeta^2 + 2k\pi^2) \quad (5.8)$$

Przykładowo, zakładając utwierdzone warunki brzegowe wzdłuż osi x , problem wartości własnej przyjmuje następującą postać:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ e^{r_1} & e^{r_2} & e^{r_3} & e^{r_4} \\ r_1 e^{r_1} & r_2 e^{r_2} & r_3 e^{r_3} & r_4 e^{r_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

przy czym wyznacznik macierzy Ξ musi być równy zero.

Jak widać, jest to funkcja trzech zmiennych: ζ , v i k (stała materiałowa) oraz parametrów: β i λ , oznaczona dalej jako Δ (zwana krzywą wartości własnej).

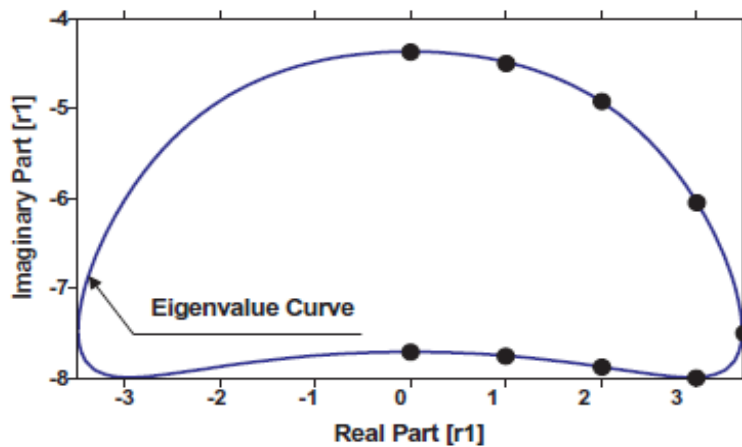
Dla płyt o założonych warunkach brzegowych typu swobodne podparcie (S) wzdłuż krawędzi $x = 0$ oraz $x = L_x$ funkcja przyjmuje postać:

$$\Delta(\zeta, v, k) = \cosh(2\zeta) - \cos(v) \cosh\sqrt{2k\pi^2 + v^2 - 2\zeta^2} + [k^2\pi^4 + 3\zeta^4 - 2\zeta^2v^2 + v^4 + 2k\pi^2(-2\zeta^2 + v^2)] \frac{\sin(v) \sinh\sqrt{2k\pi^2 + v^2 - 2\zeta^2}}{2\zeta^2v\sqrt{2k\pi^2 + v^2 - 2\zeta^2}} \quad (5.10)$$

oraz dla krawędzi utwierdzonych (C):

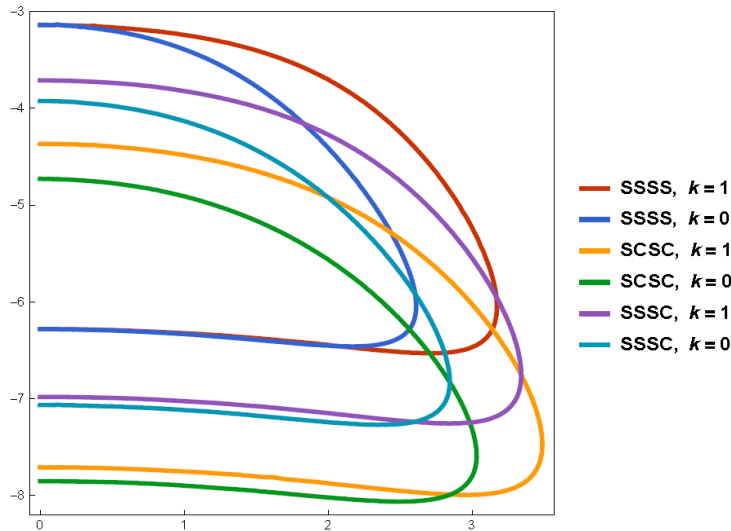
$$\Delta(\zeta, v, k) = \cosh(2\zeta) - \cos(v) \cosh\sqrt{2k\pi^2 + v^2 - 2\zeta^2} + (k\pi^2 + 3\zeta^2) \frac{\sin(v) \sinh\sqrt{2k\pi^2 + v^2 - 2\zeta^2}}{2v\sqrt{2k\pi^2 + v^2 - 2\zeta^2}} \quad (5.11)$$

Dla dowolnej wartości zmiennej k możliwe jest wyznaczenie krzywej wartości własnej na płaszczyźnie (ζ, v) – rysunek 5.9.



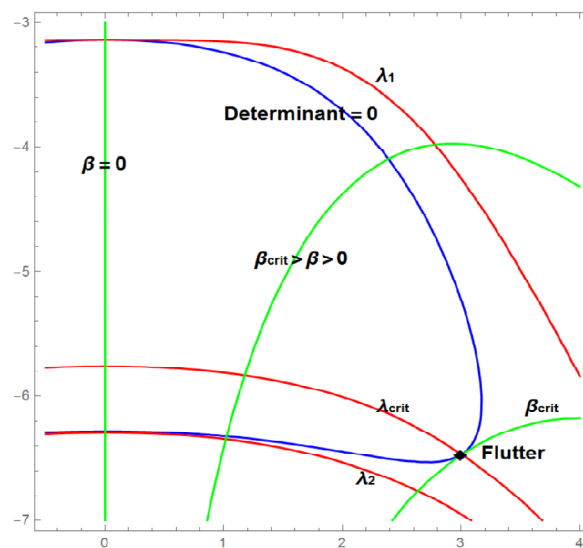
Rys. 5.9. Krzywa wartości własnej dla płyty izotropowej – warunki brzegowe typu SCSC

Dla różnych warunków brzegowych i wartości parametru k powierzchnie krzywych własnych w układzie współrzędnych (ζ, ν) zilustrowano na rysunku 5.10. Zauważmy, że rozwiązania analityczne przedstawione w pracach [10, 62] dotyczą przypadku odnoszącego się do wartości parametru $k = 0$, czyli przypadku płyty o nieskończonej szerokości w kierunku y - relacji dla belek.



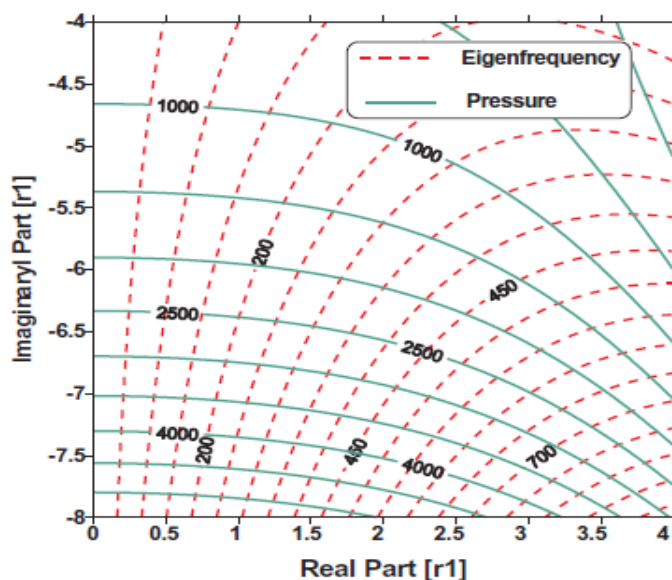
Rys. 5.10. Postacie krzywych własnych dla różnych warunków brzegowych

Wykorzystując powyższy formalizm możliwe jest wyprowadzenie w płaszczyźnie (ζ, ν) drgań swobodnych i obciążeń ciśnienia flutteru – rysunek 5.11. Częstotliwości własne odpowiadają wartościom $\beta = 0$, co odpowiada $\zeta = 0$. Trajektorie λ_1 i λ_2 (dwie różne formy) są styczne do krzywych własnych i wstawiając $\zeta = 0$ w równanie (5.10) lub (5.11) można znaleźć wartości ν , a następnie z równania (5.3) częstotliwości własne. Koalescencja dwóch form jest związana ze zjawiskiem flutteru. Przyjmując różne wartości ciśnienia aerodynamicznego $\Lambda > 0$ (tzn. $\beta > 0$) można z zależności (5.10) lub (5.11) wyprowadzić wartość równania nieliniowego rozwiązującego β_{kryt} dla jednej zmiennej.



Rys. 5.11. Ocena sąsiadujących częstotliwości i ciśnienia krytycznego (flutteru)

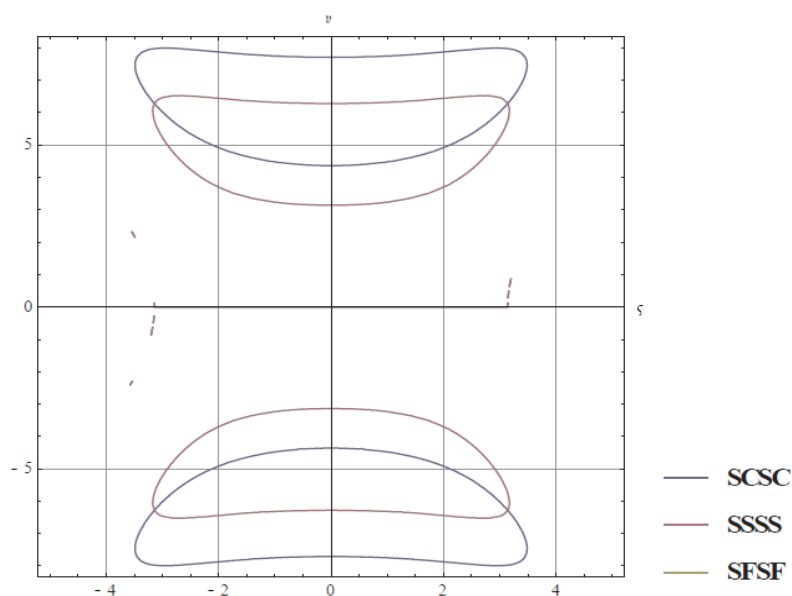
Wykresy konturowe parametrów β i λ zostały przedstawione na rysunku 5.12. Jak można zauważyć, wartości β i λ zmniejszają się wraz ze wzrostem części rzeczywistej rozwiązania $[r_1]$ tak, że maksymalne wartości krytycznego ciśnienia aerodynamicznego (parametr β) i częstotliwości drgań własnych ω (parametr λ) można uzyskać dla największej wartości ζ należącej do krzywej wartości własnych.



Rys. 5.12. Rozkład częstotliwości własnych λ (---) i ciśnienia krytycznego β (—)

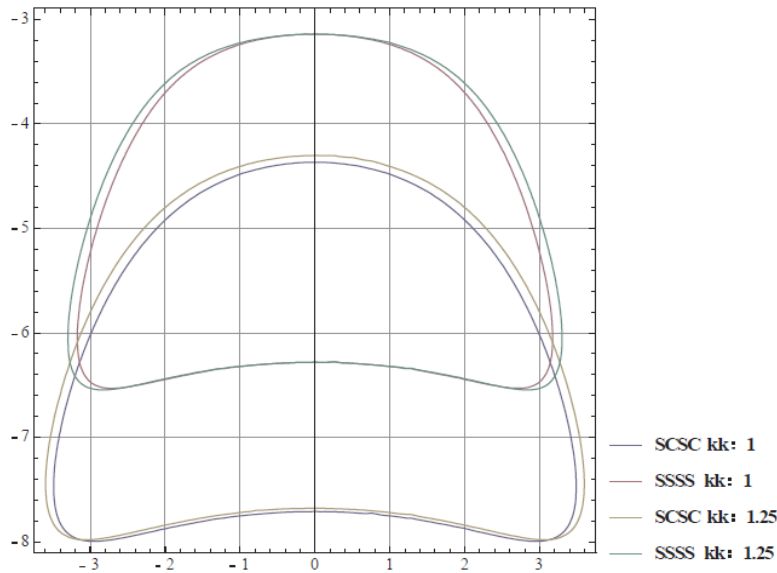
Oś pionowa (część rzeczywista $[r_1] = 0$) odpowiada krytycznym ciśnieniom aerodynamicznym $\beta = 0$. Należy wspomnieć, że zmniejszenie części rzeczywistej $[r_1]$ prowadzi do zmniejszenia ciśnienia krytycznego β i częstotliwości własnych λ .

Postać warunków brzegowych ma istotny wpływ na kształt krzywych wartości własnych – krzywe pokazano na rysunku 5.13. W przedstawionej skali nie ma widocznych różnic między krzywymi wartości własnych dla warunków brzegowych typu SCSC i SFSF. Jak można zauważyć, istnieją dwie symetryczne gałęzie krzywych.



Rys. 5.13. Krzywe wartości własnych dla różnych warunków brzegowych

Krzywe wartości własnych są funkcjami parametru k , dlatego też zmiany tej wartości mogą zmienić formę krzywych i tym samym istnienie możliwych rozwiązań charakterystyki flatteru. Na rysunku 5.14 przedstawiono takie krzywe dla różnych wartości parametru k .



Rys. 5.14. Porównanie krzywych wartości własnych dla różnych wartości parametru k

5.3.2. Optymalizacja płyt laminowanych – wpływ orientacji włókien oraz konfiguracji laminatu

Zgodnie z definicją β^{LAM} (równanie (5.5)) warunek (4.11) równoważny jest maksymalizacji parametru β^{LAM} .

Prezentowany problem optymalizacji poddawany jest ograniczeniu równości charakteryzującej tożsamość linii stycznych do trajektorii $\beta^{LAM} = \beta^{LAM}(\zeta, v)$ (równanie (5.7)) i $\Delta = \Delta(\zeta, v)$:

$$\frac{\partial \beta^{LAM} / \partial \zeta}{\partial \beta^{LAM} / \partial v} = \frac{\partial \Delta / \partial \zeta}{\partial \Delta / \partial v} \quad (5.12)$$

gdzie $\Delta(\zeta, v)$ jest funkcją opisującą krzywą wartości własnej.

Graficzne przedstawienie problemu (5.12) pokazano w rozdziale 5.5 – patrz rysunek 5.27. Ostatecznie, problem optymalizacji sprowadza się do wyszukiwania maksimum funkcji dwóch zmiennych ζ, v . Może zostać rozwiązany analitycznie z wykorzystaniem pakietów symbolicznych (np. Mathematica) lub graficznie, jak pokazano na rysunku 5.14.

W celu zmniejszenia liczby zmiennych decyzyjnych można rozważyć specjalne konfiguracje laminatów – Muc [76]. Specjalnymi klasami rozpatrywanych konfiguracji są laminaty symetryczne o orientacji dyskretnej oraz płyty o orientacji kątowej – zostało to szczegółowo opisane w rozdziale 4.3.2 (wzór (4.17)).

Więcej uwag na temat zmiennych decyzyjnych używanych w optymalizacji laminowanych struktur można znaleźć w odnośnikach [92, 251, 252] oraz w rozdziale 4 niniejszej pracy.

Należy zauważyć, że ciśnienie aerodynamiczne β^{LAM} jest normalizowane przez D_{11} (równanie (5.5)), a więc przez wartość zmieniającą orientację włókien i konfigurację laminatu. W celu zbadania wymienionych efektów konieczne jest wprowadzenie stałego czynnika, a bezwymiarowe krytyczne ciśnienie należy wyrazić jako:

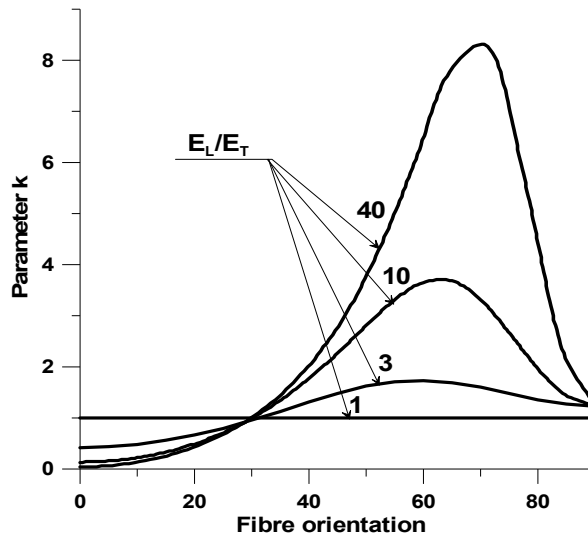
$$\bar{\beta}^{LAM} = \beta^{LAM} \frac{D_{11}}{D_{11}(\theta = 0^\circ)} \quad (5.13)$$

Jak wynika ze wzorów (5.5) - (5.8), rozwiązania w zakresie flatteru są uzależnione od dwóch podstawowych parametrów: parametru k i parametru częstotliwości λ . W przypadku płyty bez naprężeń, parametry te są z kolei zależne od: stosunku długości do szerokości L_x/L_y oraz stosunku sztywności płyty (macierze A, B i D – równania (2.12) - (2.14)). W przypadku flatteru dla naprężonej płyty, stosunek naprężeń N_y^0/N_x^0 oraz parametr naprężenia krytycznego należy określić. Aby szczegółowo zbadać wpływ każdej ze zmiennych na charakterystykę flatteru, należy mieć na uwadze, że proces będzie długotrwały.

Tabela 5.3. Właściwości warstw jednokierunkowych (E_T może być zmienną)

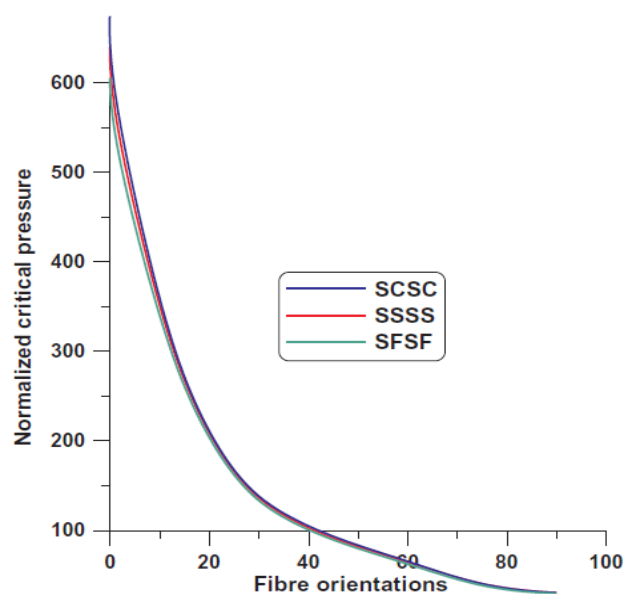
E_L [GPa]	G_{LT} [GPa]	ν_{LT}	ρ [kg/m ³]	α_{22} [°C ⁻¹]	α_{11} [°C ⁻¹]
138	$0.35x E_T$	0.3	1600	$0.18x 10^{-6}$	$27x 10^{-6}$

Współczynnik modułu ortotropowego E_L/E_T może mieć istotny wpływ na wartość parametru k w porównaniu do właściwości izotropowych ($E_L/E_T = 1$). Na rysunku 5.15 przedstawiono zmiany parametru k . Właściwości warstw jednokierunkowych przedstawiono w tabeli 5.3.



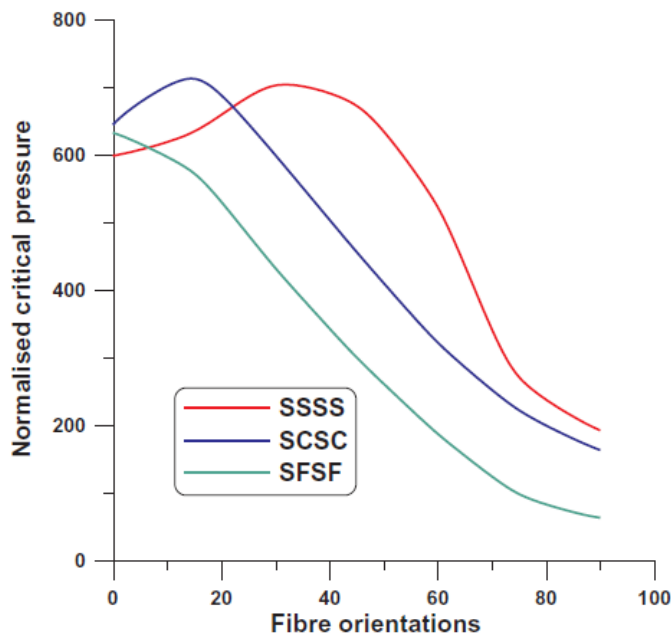
Rys. 5.15. Zmiany parametru k dla różnego współczynnika modułu ortotropowego E_L/E_T i kątowej orientacji włókien

Zmiany ciśnienia krytycznego w zależności od orientacji włókien (laminaty o orientacji kątowej) i dla różnych warunków brzegowych przedstawiono na rysunkach 5.16 i 5.17. Na wykresach pokazano dominującą rolę wzdłużnej sztywności zginania D_{11} . Podobne efekty zostały zaobserwowane przez Dixon i Mei [253].



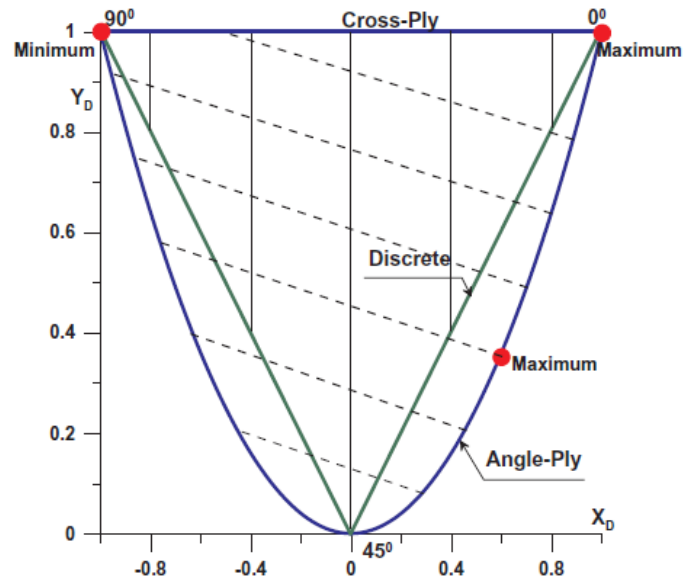
Rys. 5.16. Rozkład znormalizowanego ciśnienia krytycznego dla kwadratowych płyt o orientacji kątowej ($L_x/L_y=1$, $E_L/E_T=40$)

Wpływ parametru k i warunków brzegowych jest znacznie bardziej widoczny w przypadku płyt prostokątnych (rysunek 5.17). Położenie maksymalnego ciśnienia krytycznego zmienia się w zależności od orientacji włókien.



Rys. 5.17. Rozkład znormalizowanego ciśnienia krytycznego dla prostokątnych płyt o orientacji kątowej ($L_x/L_y=1.5$, $E_L/E_T=40$)

Wykorzystując przedstawienie kątowych zmiennych decyzyjnych zapisanych w równaniu (4.18) można zauważyć, że położenia maksymalnych znormalizowanych ciśnień krytycznych znajdują się w różnych punktach paraboli – rysunek 5.18. Powszechnie wiadomo, że parabola stanowi zewnętrzną granicę możliwych rozwiązań.



Rys. 5.18. Trajektorie optymalnych znormalizowanych ciśnień krytycznych

Muc [254] zaproponował zastosowanie metody post map do identyfikacji trajektorii mapy konturowej stałych obciążeń wyboczeniowych. Podobną procedurę zastosowano do niniejszej analizy rozkładów ciśnień krytycznych. Wyniki pokazują, że trajektorie tworzą zbiór linii prostych o różnych nachyleniach – rysunek 5.18. Wyniki te są zgodne z wynikami przedstawionymi przez Kameyama, Fukunaga [35], Peng, Xiaoping [170], Muc [160, 255]. Ogólnie rzecz biorąc, projektowanie płaskich płyt w przypadku maksymalnego ciśnienia krytycznego nie ma unikalnego rozwiązania w odniesieniu do optymalnej konfiguracji laminatu.

5.3.3. Wpływ obciążeń termo-mechanicznych

Bezwymiarowe miary obciążeń wyboczeniowych zostały zdefiniowane w następujący sposób:

$$K_x = \frac{N_{xcr} L_x^2}{\pi^2 D_{11}(\theta=0)} \frac{D_{11}(\theta=0)}{D_{11}}, K_y = \frac{N_{ycr} L_x^2}{\pi^2 D_{11}(\theta=0)} \frac{D_{11}(\theta=0)}{D_{11}} \quad (5.14)$$

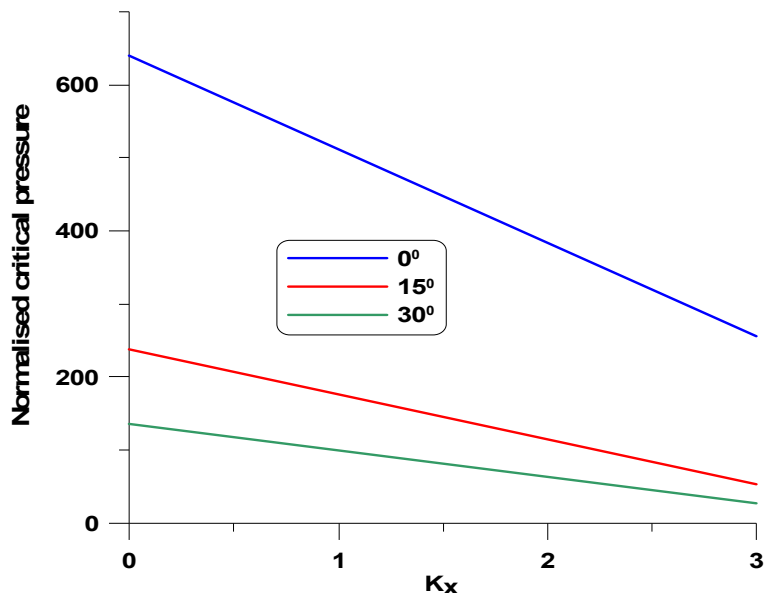
W przypadku swobodnie podpartych płyt (S), krytyczne obciążenia wyboczeniowe przy zerowej prędkości obrotowej (tj. $\beta = 0$) można uzyskać z zależności:

$$N_{xcr} \left(\frac{m L_y}{L_x} \right)^2 + N_{ycr} n^2 = \frac{\pi^2}{L_x^2} \left[D_{11} m^4 \left(\frac{L_y}{L_x} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 + D_{22} n^4 \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^2 \right] \quad (5.15)$$

gdzie m, n oznaczają numer fali wyboczenia.

Podobne zależności mogą być skonstruowane numerycznie dla dowolnych warunków brzegowych, prostokątnych, trapezowych lub skośnych płyt laminowanych. Przykład takiej analizy pokazany został przez Lovejoy [99].

Na rysunku 5.19 przedstawiono wpływ obciążeń kompresyjnych dla analizowanych płyt. Można zauważyć niemal liniową redukcję znormalizowanego ciśnienia krytycznego w przypadku flutteru dla różnych orientacji włókien i obciążeń P_x ($P_y=0$).

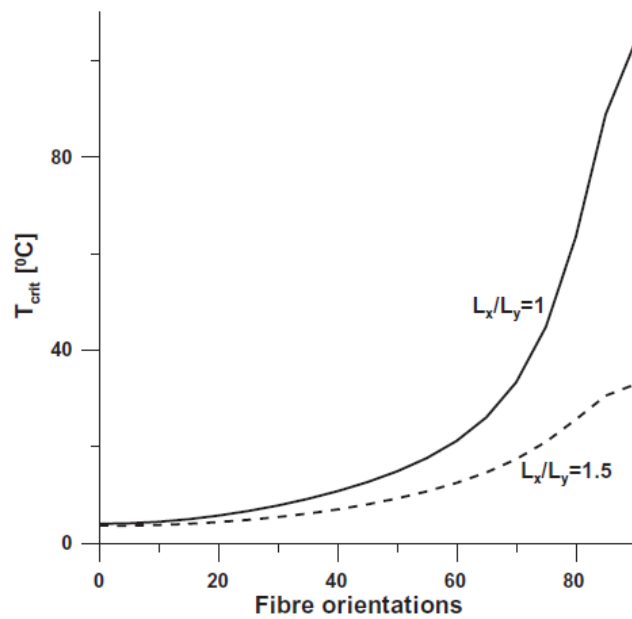


Rys. 5.19. Wpływ obciążeń kompresyjnych ($L_x/L_y=1$, $E_L/E_T=5$, $\Delta T=0$)

Bardziej skomplikowany problem pojawia się w analizie obciążeń termicznych, ponieważ temperatura krytyczna wyboczenia wyprowadzona z zależności (5.15), po zastąpieniu N_{xcr} i N_{ycr} zależnościami (2.23) ($P_x=P_y=0$), jest funkcją nie tylko sztywności zginających, ale również sztywności błonowych. Przyjmuje się, że rozkład termiczny po grubości jest równomierny.

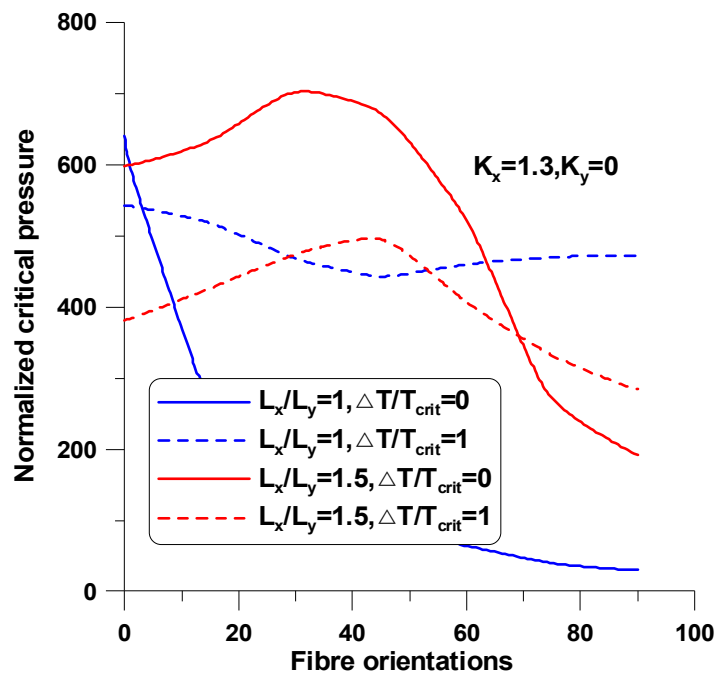
W takiej sytuacji, liczba zmiennych decyzyjnych zwiększa się z dwóch (określonych przez relacje (4.18)) do czterech. W związku z tym analiza optymalizacji jest o wiele bardziej skomplikowana i wymaga zastosowania specjalnych algorytmów optymalizacji – przedstawił to m.in. Autio [256].

Na rysunku 5.20 przedstawiono rozkład temperatury krytycznej dla różnych geometrii płyty. Jak można zauważyć, temperatura ma zupełnie inny wpływ niż w przypadku charakterystyki flutteru, ponieważ maksymalne wartości są uzyskiwane dla włókien zorientowanych na $\theta = 90^\circ$ (porównaj z rysunkami 5.16 i 5.17). W rozpatrywanym przypadku wpływ warunków brzegowych jest bardziej istotny niż poprzednio.



Rys. 5.20. Odchylenia temperatur krytycznych do orientacji włókien w przypadku płyt o orientacji kątowej – swobodne podparcie (SSSS)

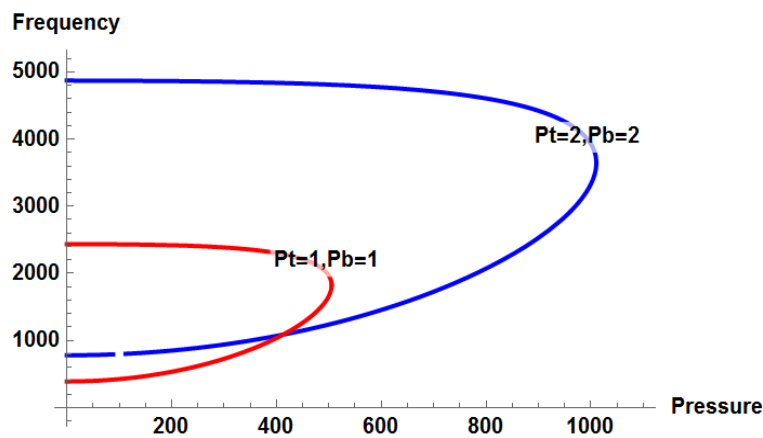
Zaprezentowane wyniki, przedstawione na rysunku 5.21, pokazują, że wielkość temperatury i orientacja włókien płyty mają oczywisty wpływ na wartości znormalizowanego ciśnienia krytycznego. Podobne wyniki i wnioski przedstawił Liaw [257].



Rys. 5.21. Wpływ orientacji włókien oraz temperatury na znormalizowane ciśnienia krytyczne

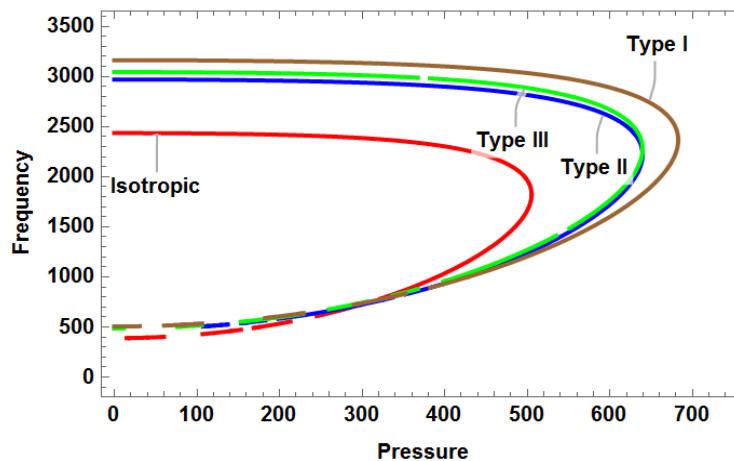
5.4. Wpływ właściwości mechanicznych płyt wykonanych z porowatych funkcjonalnych materiałów gradientowych (FGM) na wartości krytycznych ciśnień aerodynamicznych

W przypadku funkcjonalnych materiałów gradientowych (FGM), struktura jest połączeniem dwóch materiałów o dwóch różnych właściwościach materiałowych. Problem charakterystyki flutteru konstrukcji zależy od założonego składu dwóch materiałów, co może prowadzić do najlepszego opisu zachowania się konstrukcji. Badając dwie różne właściwości materiału, flutter jest funkcją względnymi właściwości materiałów – przedstawiono to na rysunku 5.22. Wzrost właściwości materiału prowadzi do wzrostu częstotliwości drgań własnych i krytycznego ciśnienia aerodynamicznego.



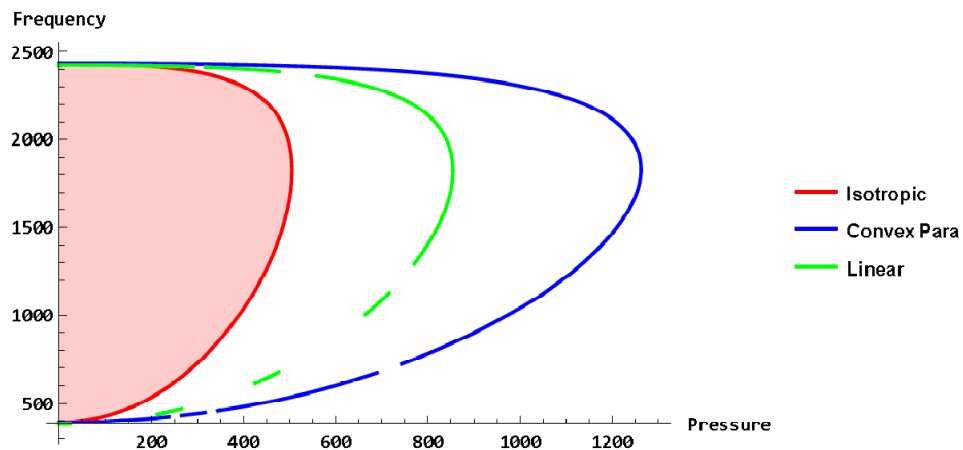
Rys. 5.22. Porównanie charakterystyki flutteru materiału posiadającego różne właściwości (warunki brzegowe typu SSSS)

Modelując właściwości materiałów wchodzących w skład struktur porowatych o zmiennych właściwościach w kierunku grubości z , można ocenić odpowiednią charakterystykę flutteru. Charakterystyki te zostały pokazane na rysunku 5.23. Maksymalny wzrost ciśnienia krytycznego (flutteru) obserwuje się dla materiału typu I (równanie (2.17)), a najbardziej podobny w przypadku materiałów typu II i III (równania (2.18) i (2.19)).



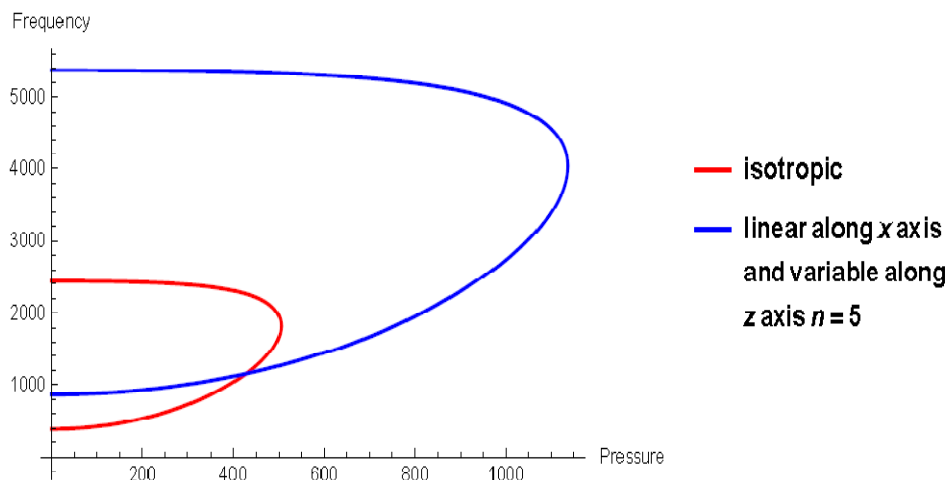
Rys. 5.23. Odchylenia ciśnień krytycznych dla porowatości zmieniającej się wzdłuż osi z (warunki brzegowe typu SSSS, $(P_t/P_b = 5, c_p = 0.2)$)

Zakładając określone rozkłady materiału, możliwe jest oszacowanie charakterystyki flatteru przy użyciu metody Rayleigha-Ritza (R-R) – wyniki zostały przedstawione na rysunku 5.24. Analizę przeprowadzono dla dwóch typów rozkładów porowatości $\eta(x)$ – liniowych i parabolicznie wypukłych. Porównując wyniki przedstawione na rysunku 5.24 z wynikami dla materiałów izotropowych/jednorodnych (rysunek 5.22) można stwierdzić, że rozkłady porowatości parabolicznie wypukłe mogą wpływać na wzrost ciśnień krytycznych. Wzrost ciśnienia flatteru jest nawet większy niż dla mocniejszego materiału jednorodnego. Naszym zdaniem jest to głównie efekt zmiennej sztywności (i jednocześnie odkształceń) płyty.



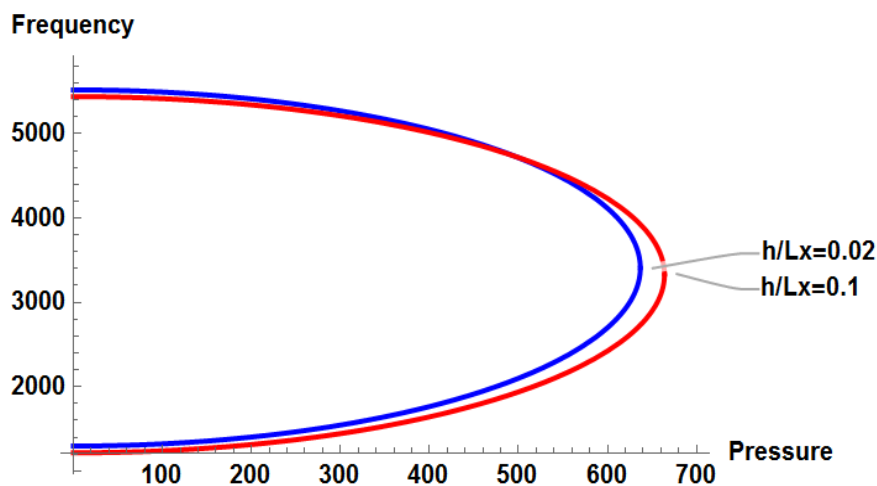
Rys. 5.24. Charakterystyka flatteru dla właściwości materiału zmieniających się wzdłuż osi x – materiał typ IV ($P_t/P_b = 2, c_p = 0.2$)

Połączenie zmiennych właściwości materiału wzdłuż osi x i z (materiał typ V – równanie (2.21)) pokazuje najlepszą reakcję strukturalną, biorąc pod uwagę wzrost zarówno krytycznych ciśnień aerodynamicznych flatteru, jak i wartości częstotliwości własnych – rysunek 5.25. Wyniki obliczono stosując metodę Rayleigha-Ritza dla prostokątnych płyt z warunkami brzegowymi typu SSSS.



Rys. 5.25. Charakterystyka flatteru dla prostokątnych płyt FGM o zmiennych właściwościach wzdłuż osi z i x – materiał typ V ($P_t/P_b = 2, c_p = 0.2$)

Aby zademonstrować skuteczność zaproponowanej metody numerycznej na rysunku 5.26, przedstawiono charakterystykę flutteru dla płyt utwierdzonych (CCCC) przy użyciu teorii CPT i FSDT. Porównanie tych dwóch wariantów teorii płyt bardzo dobrze zgadza się z wnioskami sformułowanymi w pracy [49].



Rys. 5.26. Charakterystyka flutteru dla płyt z warunkami brzegowymi typu CCCC

Podobne wyniki charakteryzujące wpływ modelowania FGM na charakterystykę flutteru i drgania swobodne podano w pracy [184].

5.5. Weryfikacja obliczeń

Porównanie częstotliwości drgań krytycznych zostało przedstawione w tabeli 5.2 (rozdział 5.2.2).

W literaturze naukowej opublikowano kilka wyników testów numerycznych. Są one przedstawione np. przez Li i Narita [20] czy Lin i współpracowników [23]. Wyniki te zostały wykorzystane do sprawdzenia poprawności i dokładności metody analitycznej dla kwadratowych płyt izotropowych i przedstawione w tabeli 5.4.

Tabela 5.4. Weryfikacja krytycznego ciśnienia aerodynamicznego i częstotliwości naturalnych dla kwadratowej płyty izotropowej

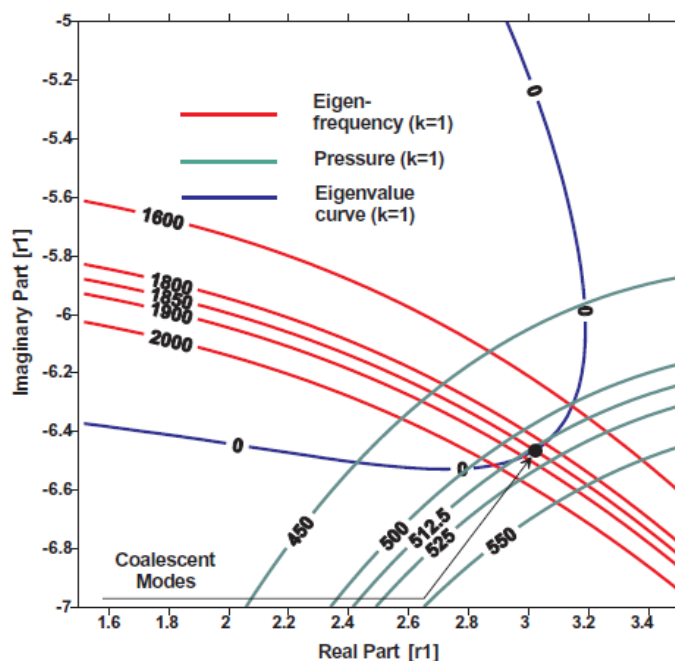
	Bezwymiarowe częstotliwości własne		Bezwymiarowe częstotliwości krytyczne λ	Bezwymiarowe ciśnienie aerodynamiczne β	ζ krytyczne	ν krytyczne
	$\omega_{(1)}^2$	$\omega_{(2)}^2$				
Lin i wsp. [23]	389.636	2435.23	512.58	1847.5	-----	-----
Muc [76]	391.2	2434.1	-----	-----	-----	-----
Obecne badania analityczne	389.24 (0, $\nu=-3.14$)	2443.7 (0, $\nu=-6.29$)	514.06	1852.31	3.010	-6.472

Jak można zauważyć, zarówno dokładne rozwiązania analityczne, jak i wyniki numeryczne (metoda elementów skończonych), bardzo dobrze zgadzają się z liczbowymi przewidywaniami w przypadku obliczeń flutteru oraz drgań swobodnych. Należy zauważyć, że parametr k w równaniu (5.5) jest równy jeden dla pierwszej formy (kwadratowe płyty izotropowe).

Metoda analitycznego (graficznego) wyprowadzenia krytycznego ciśnienia aerodynamicznego β_{kryt} została przedstawiona na rysunku 5.27. Trajektoria ciśnienia krytycznego jest styczna do krzywej wartości własnej. Krzywa, charakteryzująca częstotliwości własne, przecinająca powyższy punkt określa odpowiadającą im wartość krytycznych częstotliwości własnych dla form koalescencyjnych. Punkt ten jest ściśle i jednoznacznie określony przez parametry (ζ, ν) . Dla wyznaczonej wartości ciśnienia krytycznego β jego trajektoria przecina krzywą wartości własnej w dwóch punktach odpowiadających dwóm wartościom częstotliwości. Analizę można przeprowadzić dla wartości $\beta = 0$ – naturalnych częstotliwości własnych dwóch sąsiadujących form. Dla różnych ciśnień aerodynamicznych postać form drgań własnych jest zdefiniowana jednoznacznie przez wartości ζ, ν oraz k i może być łatwo wyznaczona na podstawie zależności (5.8) przy założeniu, że jedna ze stałych A_i jest równa jeden. Punkt form koalescencyjnych dzieli krzywą wartości własnych na dwie części. Pierwsza, górna część krzywej zaczynająca się od $\beta = 0$, opisuje zachowanie przed-flutteru i kończy się w punkcie krytycznym. Druga, dolna część krzywej, opisuje zachowanie po-flutteru.

Parametr k jest bezpośrednio związany z formą drgań naturalnych. Dla kwadratowych płyt izotropowych bez obciążeń termo-mechanicznych formy drgań są identyfikowane w następujący sposób:

- Forma 1: $m = 1, n = 1; k = 1$;
- Forma 2: $m = 2, n = 1; k = 0.25$;
- Forma 3: $m = 1, n = 2; k = 4$;
- Forma 4: $m = 2, n = 2; k = 1$.



Rys. 5.27. Graficzne przedstawienie rozwiązania flutteru dla kwadratowych płyt izotropowych – swobodne podparcie (SSSS)

Rysunek 5.27 przedstawia założenia dla pierwszej formy. Aby zaprezentować punkt koalescencyjny dla drugiej sąsiadującej formy konieczne jest pokazanie odpowiedniej krzywej dla wartości $k = 0.25$. W tym przypadku krzywe krytycznej częstotliwości własnej i krytycznego ciśnienia (określone na rysunku 5.27) przecinają górną część krzywej wartości własnej.

Równania dla płaskich płyt są dalej redukowane dla belek, tj. wszystkie elementy łącznie ze zróżnicowaniem w odniesieniu do zmiennych y są wyeliminowane.

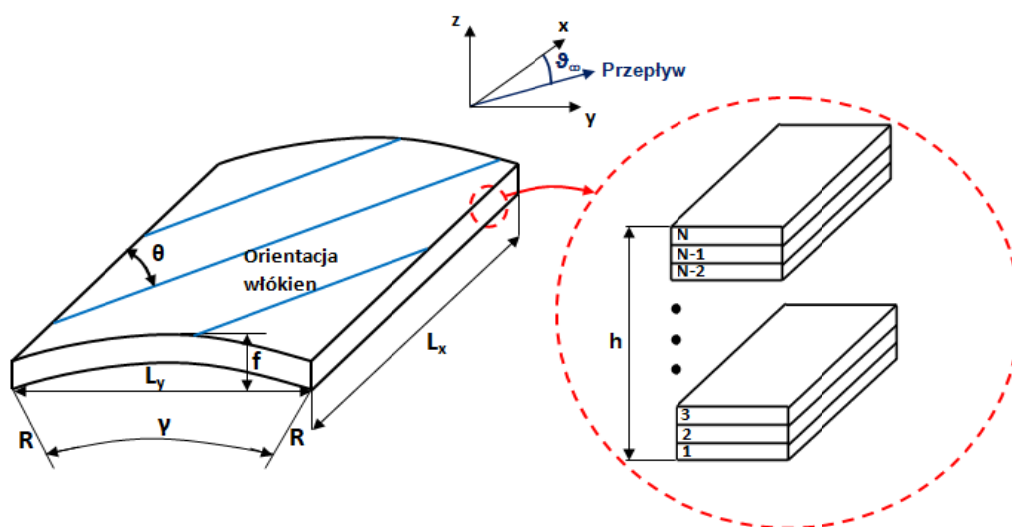
6. OPTIMALNE PROJEKTOWANIE LAMINOWANYCH PANELI CYLINDRYCZNYCH

Przegląd literatury z zakresu optymalizacji paneli cylindrycznych został przytoczony w rozdziałach 1.3 oraz 4.3.1 niniejszej rozprawy.

6.1. Relacje podstawowe

Podstawowe założenia teorii liniowej, elastycznej i przemieszczenia dla płytkich laminowanych paneli cylindrycznych (rysunek 6.1) mogą być podane w następujący sposób:

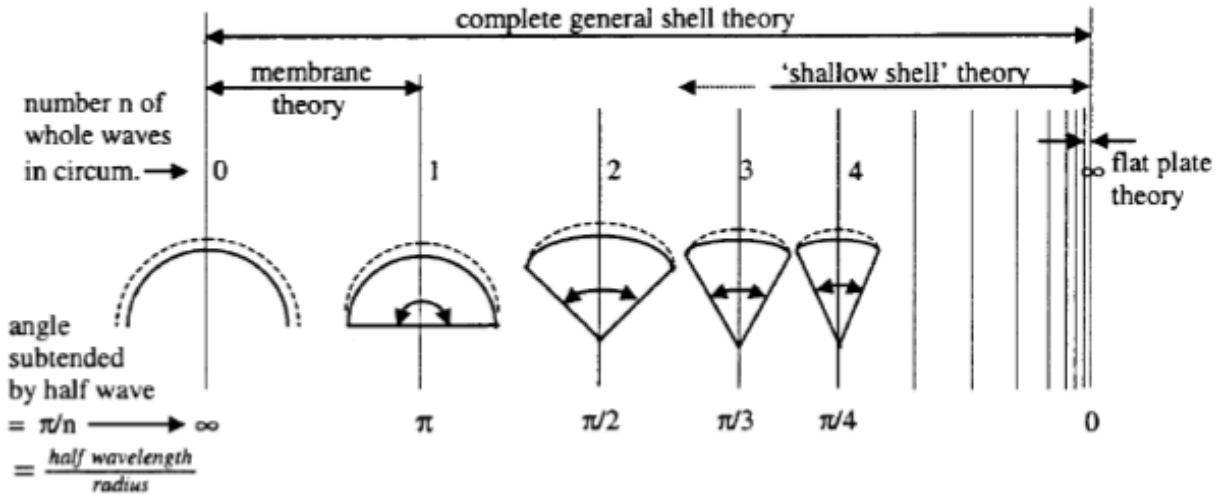
- 1 Deformacje powłoki spełniają hipotezę Love'a-Kirchhoffa (L-K) i są scharakteryzowane przez trzy składowe przemieszczenia, tj. dwie na płaszczyźnie u, v i jedna normalna w ;
- 2 Ścianka powłoki jest zbudowana z N warstw wytworzonych z materiału kompozytowego posiadającego identyczne właściwości mechaniczne; szczegółowo omówiono dwa typy konfiguracji laminatu: laminaty o orientacji typu „angle-ply” (kątovej) oraz laminaty o orientacji dyskretniej;
- 3 Zastosowano przybliżoną teorię Donnell-Mushtari-Vlasov (DMV); należy zauważyć, że Vlasov [258] zdefiniował płytką powłokę jako powłokę, której wzrost nie przekracza $1/5$ najmniejszego wymiaru powłoki w jej płaszczyźnie (rzut na płaszczyznę współrzędnych Oxy);
- 4 Częstotliwości naturalne wzdłuż osi x i y są małe w porównaniu z normalną (do powierzchni środkowej) częstotliwością własną;
- 5 Naddźwiękowe ciśnienie aerodynamiczne Δp jest opisane przez klasyczne równanie teorii typu „piston”;
- 6 Szczegółowa analiza wyników numerycznych wyraźnie pokazuje, że wpływ tłumienia jest pomijalnie mały (patrz np. odnośnik [20]) i efekty te są dalej eliminowane.



Rys. 6.1. Geometria płytkich paneli cylindrycznych

W przypadku wielowarstwowych laminowanych paneli cylindrycznych spełniających wymienione powyżej założenia, podstawowy zestaw równań różniczkowych przedstawiono w załączniku A, a ciśnienie aerodynamiczne Δp określono wzorem (2.26).

Rysunek 6.2 przedstawia porównanie teorii płytkiej powłoki DMV z ogólną teorią powłoki. Jeśli liczba fal obwodowych n jest bardzo duża, wówczas długość połowy fali odkształcenia w porównaniu z promieniem powłoki staje się mała (dąży do zera), a płaska płyta daje dobrą aproksymację.



Rys. 6.2. Zakres zastosowania teorii płytkiej powłoki

6.2. Częstotliwości drgań swobodnych

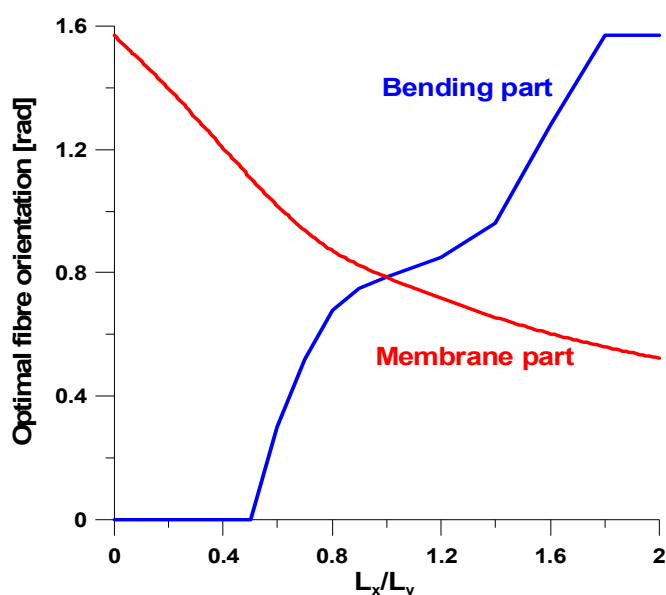
Jak wspomniano w rozdziale 4.2.1 oraz 5.2 ważną klasą problemów w analizie flutteru są drgania swobodne układów. W analizie drgań swobodnych przyjmuje się, że macierz tłumiąca jest zerowa oraz, że nie występuje żadna siła zewnętrzna działająca na układ.

Zakładając, że dla płyt swobodnie podpartych (SSSS) elementy $A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = 0$, podstawowe częstotliwości wynikowe mają postać zamkniętą analityczną (patrz Muc i pozostali [247]) i można je zapisać jak poniżej:

$$\rho h \omega_{mn}^2 = D_{11} r_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) r_m^2 \beta_n^2 + D_{22} \beta_n^4 + p(A_{rs}), r_m = \frac{m\pi}{L_x}, \beta_n = \frac{n\pi}{\gamma R}, L_y \approx \gamma R \quad (6.1)$$

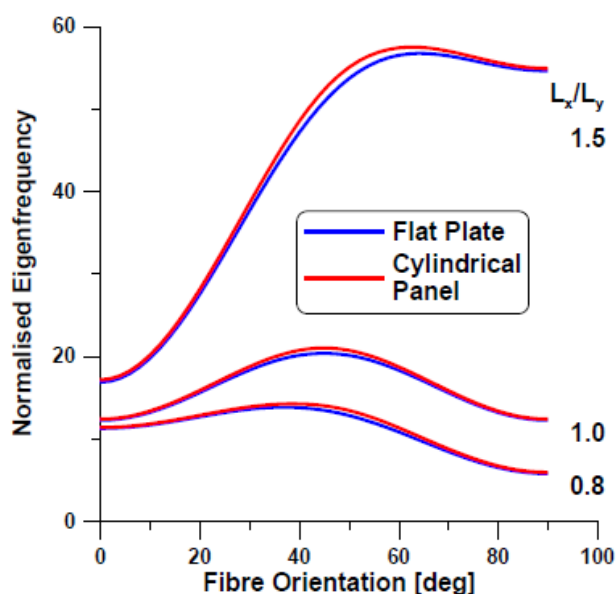
$$p(A_{rs}) = \frac{1}{R^2} \frac{r_m^4 (A_{11} A_{22} - A_{12}^2) A_{66}}{r_m^4 A_{11} A_{66} + r_m^2 \beta_n^2 (A_{11} A_{22} - A_{12}^2 - 2A_{12} A_{66}) + \beta_n^4 A_{22} A_{66}}$$

Częstotliwości składają się z dwóch części, z których pierwsza odpowiada zginaniu (warunki dotyczące sztywności zginania D_{ij}), a druga to część błonowa $p(A_{rs})$ charakteryzująca się tak zwanym „tłumieniem strukturalnym”.



Rys. 6.3. Optymalne ułożenie włókien dla płtych paneli cylindrycznych o orientacji kątowej

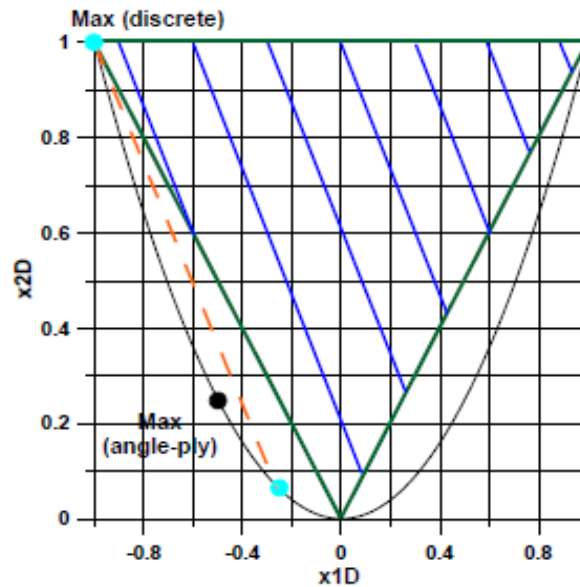
Rysunek 6.3 pokazuje rozkład optymalnych orientacji włókien, które można wyprowadzić z zależności (6.1). Jak widać na tym rysunku, warunki giętne i warunki błonowe mają przeciwny wpływ na optymalną orientację włókien w odniesieniu do stosunku geometrycznego panelu L_x/L_y . Zasadniczo, w przypadku laminowanych paneli zakrzywionych, optymalna orientacja włókien jest inna niż w przypadku płaskich płyt – patrz rysunek 6.4.



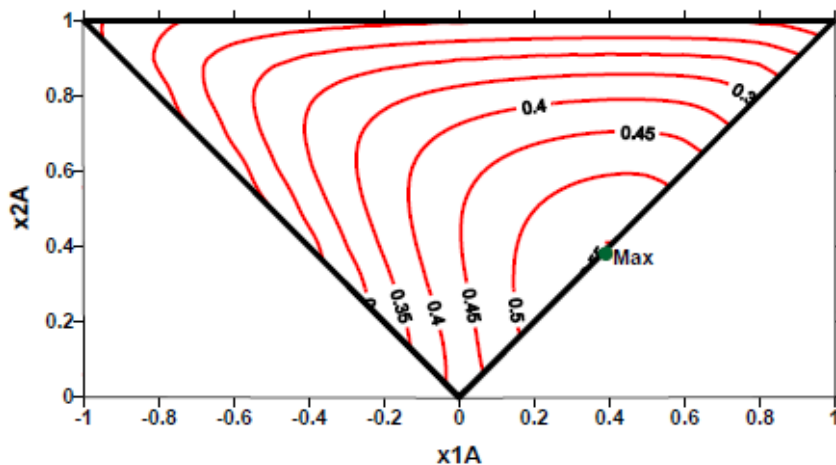
Rys. 6.4. Rozkłady częstotliwości własnych dla swobodnie podpartych płyt płaskich i paneli cylindrycznych ($\gamma = 0.1$ [rad]) – laminaty o orientacji kątowej

Dla kątowej konfiguracji laminatu, wartości częstotliwości własnych, jak również położenia optymalnej orientacji włókien, rosną wraz ze wzrostem wartości parametru płytkości f/L_y (kąt γ) – rysunek 6.1.

Dla dyskretnych orientacji włókien optymalną konfigurację paneli cylindrycznych uzyskuje się za pomocą czterech zmiennych obliczeniowych zdefiniowanych w rozdziale 4.3.2. Rysunki 6.5(a), 6.5(b) przedstawiają wykresy konturów częstotliwości własnych. Podobnie, jak w przypadku płaskich płyt, dla paneli cylindrycznych kontury na płaszczyźnie (x_{1D}, x_{2D}) są opisane liniami prostymi (patrz Muc [76]), natomiast na płaszczyźnie (x_{1A}, x_{2A}) kontury tworzą krzywe. Można zauważyć, że w drugim przypadku (rysunek 6.5(b)) maksimum występuje w pojedynczym punkcie na granicy rozwiązań dopuszczalnych (trójkąt). Maksymalną wartość częstotliwości własnych osiąga się dla włókien o orientacji $\theta = 90^\circ$ (rysunek 6.5(a)). Jak można zaobserwować na rysunkach 6.4 i 6.5(b), wpływ efektów błonowych jest niewielki.



(a) płaszczyzna giętna $x_{1D} - x_{2D}$

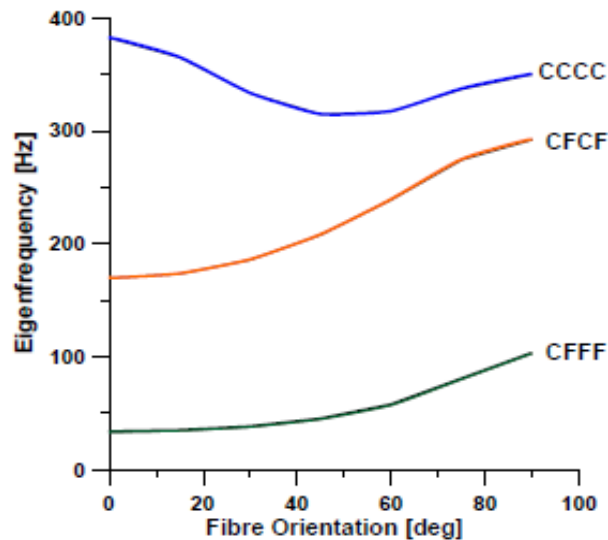


(b) płaszczyzna błonowa $x_{1A} - x_{2A}$

Rys. 6.5. Wykresy konturowe częstotliwości własnych – panele cylindryczne swobodnie podparte ($L_x/L_y = 1.5$)

Postać warunków brzegowych ma istotny wpływ na rozkład częstotliwości własnych, a następnie, na wartości ciśnień aerodynamicznych. Efekt ten oceniono za pomocą analizy metodą elementów skończonych (NISA II) i przedstawiono go na rysunku 6.6. Jak można

zauważyć, najwyższe wartości częstotliwości własnych osiągane są dla paneli utwierdzonych (CCCC), a najniższe dla paneli z warunkami brzegowymi typu CFFF.



Rys. 6.6. Wpływ różnych warunków brzegowych – panel cylindryczna o kątowej orientacji włókien ($L_x/L_y = 1.0$, $\gamma = 0.1$, $h/L_y = 0.05$)

6.3. Maksymalizacja wartości ciśnienia aerodynamicznego

6.3.1. Rozwiązanie metodą analityczną

W rozdziale 3.6 omówiono metodę analitycznego rozwiązywania zagadnień naddźwiękowego flatteru dla powłok cylindrycznych. Odnosząc się do równania (3.19) oraz zakładając, że kąt przepływu ϑ_∞ jest równy zero i zanedbując tłumienie aerodynamiczne ($\mu = 0$), uzyskuje się charakterystyczne równanie algebraiczne, które można zapisać w następujący sposób:

$$(r_{mi})^8 + a_6(r_{mi})^6 + a_5(r_{mi})^5 + a_4(r_{mi})^4 + a_3(r_{mi})^3 + a_2(r_{mi})^2 + a_1r_{mi} + \lambda = 0 \quad (6.2)$$

gdzie $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ i λ są stałymi zdefiniowanymi w **Załączniku C**.

W przypadku płaskich płyt powyższa zależność jest zredukowana do równania algebraicznego czwartego rzędu pierwiastka r_{mi} – literatura [45]. W przypadku płytkich izotropowych powłok cylindrycznych Stepanov [25], po pewnych uproszczeniach, również zmniejszył charakterystyczną zależność (6.2) do czwartego rzędu.

Proces obliczeń analitycznych/numerycznych można scharakteryzować w następujący sposób:

- Definiowanie właściwości geometrycznych i mechanicznych powłoki;
- Założenie sąsiedztwa form drgań powłoki (np. $m = n = 1$ i $m = 2, n = 1$);
- Rozwiązanie równania charakterystycznego (6.2) w odniesieniu do ośmiu niewiadomych $r_{m1}, r_{m2}, \dots, r_{m8}$;

- Dla założonych warunków brzegowych typu SB1SB2 i bezwymiarowego ciśnienia aerodynamicznego Λ obliczyć bezwymiarowe częstotliwości z zestawu ośmiu równań liniowych w odniesieniu do współczynników A_i których wyznacznik rozwiązań nietrywialnych jest równy zeru.

Bezwymiarowe ciśnienie krytyczne $\bar{\Lambda}$ i częstotliwości $\bar{\kappa}$ zostały wprowadzone w następujący sposób:

$$\bar{\Lambda} = \Lambda \frac{L_x^3}{D_{11}(\theta = 0^0)}, \bar{\kappa} = \frac{\rho h L_x^4}{D_{11}(\theta = 0^0)} \omega^2 \quad (6.3)$$

Schematyczny wykres przedstawiający obliczenia analityczne/numeryczne przedstawiono w rozdziale 3.1 (rysunek 3.1). W rzeczywistości, obliczenia często wykonywane są z wykorzystaniem pakietu symbolicznego Mathematica.

Dla izotropowych paneli cylindrycznych relacja (6.2) zostaje zredukowana do poniższej formy:

$$(r_{mi}^2 - \pi^2 k^2)^2 [(r_{mi}^2 - \pi^2 k^2)^2 + \beta r_{mi} - \lambda] + 4\varepsilon^4 r_{mi}^4 = 0 \quad (6.4)$$

gdzie współczynniki k , β i λ mogą być wyznaczone z relacji zawartych w **Załączniku C**.

Zależność w nawiasie kwadratowym odpowiada charakterystycznemu równaniu dla płaskich płyt (izotropowych lub anizotropowych [45]), a podkreślona zależność przedstawia wpływ krzywizny powłoki (R) i nie może być pominięta. Powyższe równanie pokazuje istotne różnice w równaniu charakterystycznym opisującym analityczne rozwiązania, które również mają wpływ na optymalne projektowanie.

6.3.2. Rozwiązanie metodą numeryczną

W niniejszej pracy wykorzystano pakiet NISA/Aero FE. Pod wpływem stałego lub zmiennego obciążenia aerodynamicznego dostępne są różne typy rozwiązań.

W przypadku aeroelastycznej analizy stabilności flatteru stosuje się zazwyczaj następujące kroki:

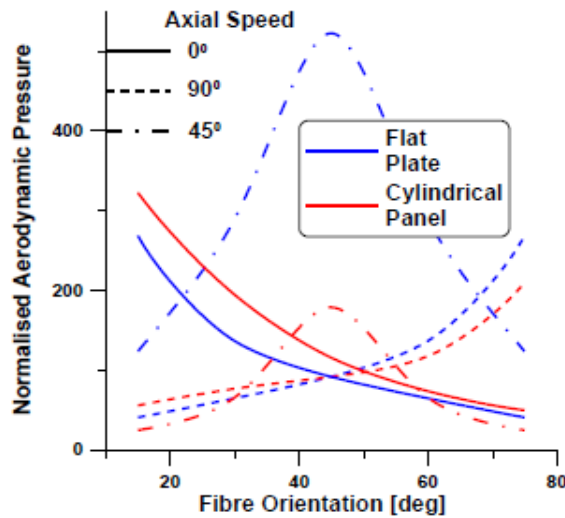
- 1 Generowany jest model FE struktury, a następnie wykonywana jest analiza swobodnych drgań z wykorzystaniem modułu DYNAMICS NISA i zapisywane są odpowiednie pliki do późniejszej analizy aeroelastycznej;
- 2 Niestabilne siły aerodynamiczne (analiza flatteru – rysunek 3.1) dla dużych prędkości lotu (liczba Macha $M > 1.5$) obliczane są z wykorzystaniem teorii typu „piston”.

Element skończony NKTP 32 (pięć stopni swobody w każdym węźle) służy do modelowania wielowarstwowych laminowanych dwuwymiarowych płytowych/powłokowych struktur.

6.3.3. Wpływ orientacji włókien oraz konfiguracji laminatu

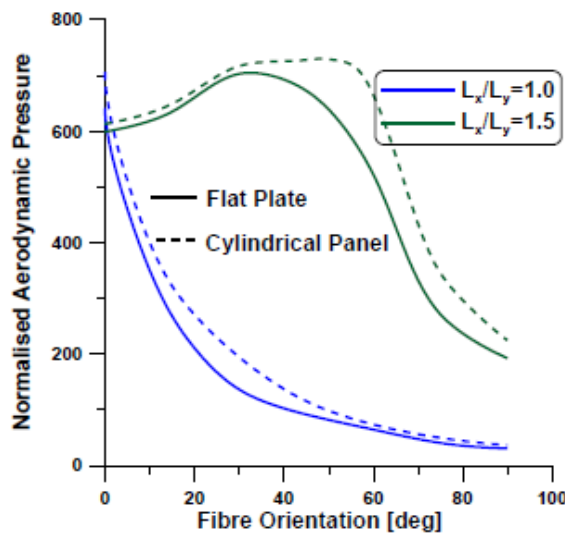
W przypadku paneli cylindrycznych swobodnie podpartych (SSSS) o kątovej orientacji włókien, efekty niestabilności dynamicznej są inne niż w przypadku płyt płaskich. Jest to

szczególnie widoczne po analizie wyników dla struktur narażonych na różne kierunki przepływu powietrza – rysunek 6.7. Najwyższe wartości ciśnień aerodynamicznych są zawsze uzyskiwane gdy kierunek przepływu powietrza pokrywa się z kierunkiem ortotropii $E_L (>E_T)$. Jeżeli kąt przepływu ϑ_∞ (równanie (2.26)) różni się, to ciśnienie aerodynamiczne paneli cylindrycznych może wzrosnąć lub zmaleć w porównaniu z wynikami dla płaskich płyt. Tak więc tłumienie strukturalne wyrażone przez termin $p(Ars)$ w równaniu (6.1) ma pozytywny i negatywny wpływ.



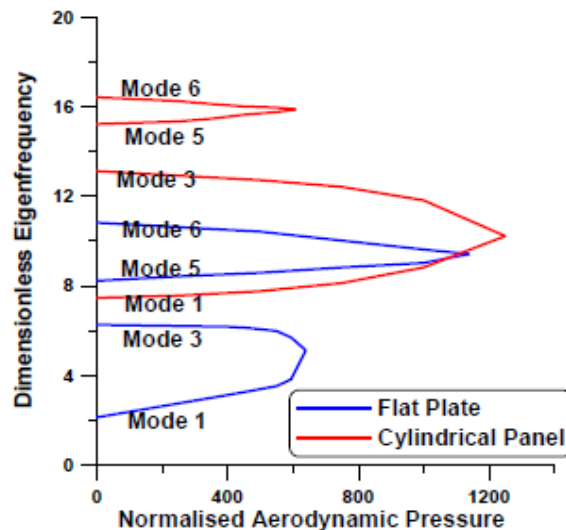
Rys. 6.7. Zmiany krytycznych ciśnień aerodynamicznych przy różnych orientacjach włókien i kątach przepływu dla płaskich płyt i paneli cylindrycznych ($L_x/L_y = 1.0$, $\gamma = 0.1$, $h/L_y = 0.05$, warunki brzegowe typu SSSS)

Rozkłady charakterystyki aerodynamicznej różnią się w zależności od stosunków geometrycznych L_x/L_y – rysunek 6.8. Podobnie jak w przypadku charakterystyki drgań swobodnych (rysunek 6.4) położenie maksymalnego ciśnienia aerodynamicznego dla paneli cylindrycznych jest inne niż w przypadku płaskich płyt ($L_x/L_y \neq 1.0$).



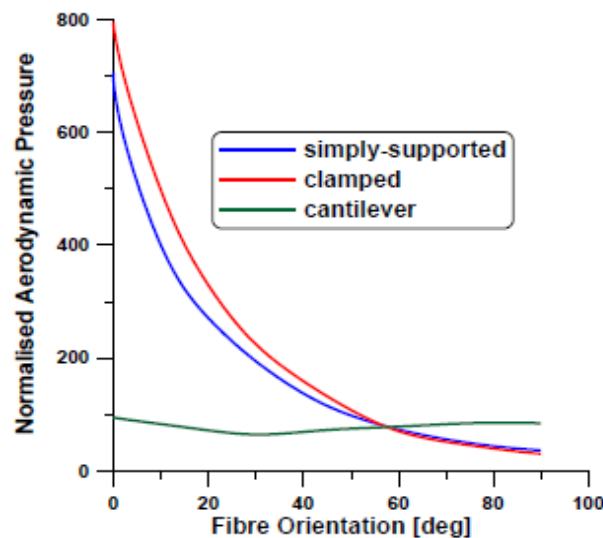
Rys. 6.8. Rozkłady znormalizowanych ciśnień krytycznych dla kwadratowych i prostokątnych struktur o orientacji kątowej ($\gamma = 0.1$, $h/L_y = 0.05$, warunki brzegowe typu SSSS, $E_L/E_T = 40$, kąt przepływu $\vartheta_\infty = 0.0$)

Kolejne wyniki przedstawiają krzywe bezwymiarowych częstotliwości własnych w stosunku do bezwymiarowych ciśnień aerodynamicznych dla różnych form drgań – rysunek 6.9. Częstotliwości bezwymiarowe formy 1 i 3 oraz formy 5 i 6 zbliżają się do siebie, a następnie po wystąpieniu flutteru łączą się w tą samą formę. W przypadku płaskich płyt niestabilność dynamiczna występuje dla form 1, 3, podczas gdy dla paneli cylindrycznych dla wyższych form 5, 6. W związku z tym konieczne jest, aby zbadać różne formy drgań w celu oceny najniższych form odpowiadających utracie niestabilności dynamicznej.



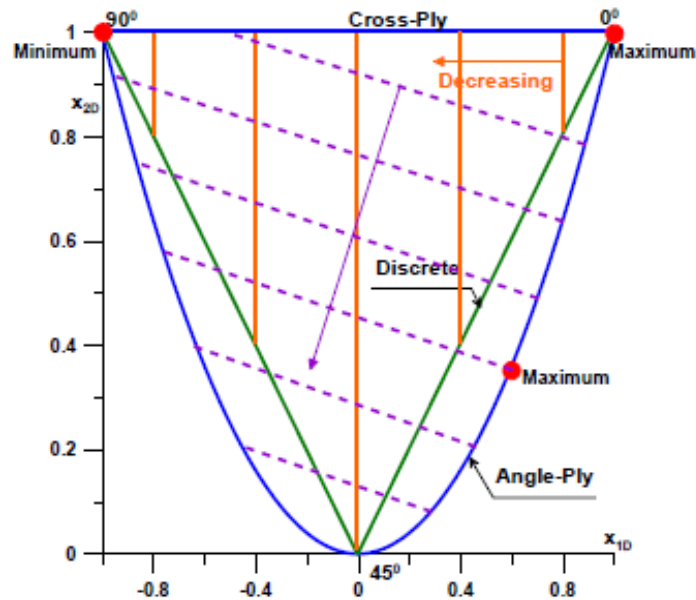
Rys. 6.9. Bezwymiarowa częstotliwość w stosunku do bezwymiarowego ciśnienia aerodynamicznego (warunki brzegowe typu SSSS, orientacja włókien $\theta = 90^0$, kąt przepływu $\vartheta_\infty = 90^0$)

Granica flutteru (niestabilność dynamiczna) silnie zależy od warunków brzegowych. Rysunek 6.10 przedstawia rozkład ciśnienia aerodynamicznego dla paneli cylindrycznych z kątową orientacją włókien. Wyniki są typowe, tj. najwyższe wartości ciśnień aerodynamicznych uzyskano dla paneli utwierdzonych (CCCC), a najniższe dla struktur z warunkami brzegowymi typu CFFF. Warto zauważyć, że dla paneli wspornikowych maksymalne wartości wystąpiły przy $\theta = 90^0$.



Rys. 6.10. Rozkład znormalizowanego ciśnienia krytycznego dla paneli cylindrycznych o orientacji kątowej ($\gamma = 0.1$, $h/L_y = 0.05$, $E_L/E_T = 40$, kąt przepływu $\vartheta_\infty = 0.0$)

Stosując metodologię wprowadzoną w rozdziałach 4.3.2 i 6.2, rozkłady wykresów konturowych przedstawiono na rysunku 6.11. Dla dyskretnych orientacji włókien położenie maksimum jest identyczne, a nie różne jak w przypadku laminatów o orientacji kątowej (rysunek 6.8).



Rys. 6.11. Optymalne znormalizowane trajektorie ciśnienia krytycznego dla paneli cylindrycznej ($\gamma = 0.1$, $h/L_y = 0.05$, warunki brzegowe typu SSSS, $E_L/E_T = 40$, kąt przepływu $\vartheta_\infty = 0.0$, płaszczyzna kwadratowa — $L_x/L_y = 1.0$, płaszczyzna prostokątna - - - - $L_x/L_y = 1.5$)

Wprowadzając więcej dyskretnych zmiennych, podobnie jak np. w odnośniku [161], można osiągnąć lepsze przybliżenie globalnego optimum, uzyskanego dla kątowej orientacji włókien. Warto zauważyć, że aproksymacja zaproponowana przez Bolotin [7] wydaje się nie być odpowiednia w oszacowaniu optymalnego ciśnienia aerodynamicznego.

6.4. Weryfikacja obliczeń

W przypadku swobodnie podpartych paneli cylindrycznych porównanie wyników opublikowanych w literaturze, obliczonych przy użyciu metody analitycznej (opisanej w rozdziale 6.3.1.) oraz za pomocą pakietu elementów skończonych (rozdział 6.3.2.), przedstawiono w tabeli 6.1. Zgodność między nimi jest bardzo dobra. Jednak dla siatki 10×10 wyniki uzyskane za pomocą analizy numerycznej są nieco niższe niż uzyskane przez innych badaczy lub analitycznie. Wynika to z tego, że tylko 81 punktów całkowania (9×9) oraz 10 form drgań jest branych pod uwagę w niniejszej analizie. Wynik ulega poprawie, jeśli do dalszych obliczeń uwzględni się więcej punktów całkowania i więcej form normalnych (gęstsza siatka).

Tabela 6.1 Weryfikacja krytycznego ciśnienia aerodynamicznego i częstotliwości naturalnych dla swobodnie podpartych kwadratowych paneli cylindrycznych o orientacji kątowej $[45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0]$ wystawionych na osiowy przepływ powietrza

	Drgania swobodne $\bar{\kappa} (\Lambda = 0)$		Drgania krytyczne $\bar{\kappa} (\Lambda = \bar{\Lambda})$	Ciśnienie krytyczne $\bar{\Lambda}$
Literatura				
Singha, Mandal [242]	14.78	38.24	24.82	547.82
Metoda analityczna				
MES (NISA/Aero)	15.04	39.84	25.44	555.44
siatka 10x10	15.28	40.08	25.68	559.3
siatka 50x50	14.98	39.27	25.12	542.2

7. WNIOSKI I KIERUNKI DALSZYCH PRAC

7.1. Wnioski

Przedstawiona rozprawa doktorska dowodzi celowości i efektywności zastosowania metod optymalizacji w projektowaniu konstrukcji narażonych na utratę stateczności dynamicznej (flutter dla nadkrytycznych prędkości płynów). Rozważania przeprowadzono dla dwóch rodzajów materiałów kompozytowych, tzn.:

- Laminowanych warstwowych MK;
- Porowatych funkcjonalnych materiałów gradientowych FGM.

Należy podkreślić, że tematyka badań jest bezpośrednio związana z określeniem częstotliwości drgań własnych konstrukcji, które stanowią punkt wyjścia do określenia flutteru (koalescencja – zlewanie się sąsiednich form drgań).

Przeprowadzona analiza obliczeniowa w niniejszej rozprawie pozwala sformułować następujące wnioski:

1. W przypadku płyt prostokątnych wystarczająca jest analiza rozkładów krytycznych ciśnień aerodynamicznych i częstotliwości drgań własnych:
 - a. dla kątowej orientacji laminatu tylko na prostej, gdzie zmienna kątowa należy do przedziału $0^{\circ} - 90^{\circ}$;
 - b. w przypadku orientacji dyskretnej $[0_2^{\circ}, \pm 45^{\circ}, 90_2^{\circ}]$ wykazano, że analizę można prowadzić tylko i wyłącznie na płaszczyźnie giętnej w układzie $\cos 2\theta - \cos^2 2\theta$.
2. W przypadku paneli cylindrycznych dla zmiennych kątowych występuje identyczna sytuacja jak w przedstawionym powyżej punkcie 1a. Dla dyskretnych zmiennych decyzyjnych $[0_2^{\circ}, \pm 45^{\circ}, 90_2^{\circ}]$ konieczne jest wprowadzenie dwóch płaszczyzn: jednej przedstawiającej efekty giętne i drugiej obrazującej efekty błonowe.
3. Dla płyt prostokątnych trajektorie ciśnienia aerodynamicznego tworzą proste – przecięcie prostych z obwiednią (parabola) pozwala na uzyskanie optymalnej orientacji laminatu dla konfiguracji kątowej („angle-ply”).
4. Dla paneli cylindrycznych trajektorie ciśnienia aerodynamicznego tworzą układ prostych równoległych na płaszczyźnie giętnej oraz układ krzywych drugiego stopnia na płaszczyźnie błonowej; wykonanie tych charakterystyk pozwala automatycznie na znalezienie optimum w sensie globalnym.
5. Wykazano, że dla płyt prostokątnych wykonanych z porowatych funkcjonalnych materiałów gradientowych FGM osiągnięcie maksimum ciśnienia aerodynamicznego jest zawsze możliwe dla wybranych konfiguracji rozkładu porowatości konstrukcji (wzdłuż zmiennej grubości).
6. W przypadku dowolnych konfiguracji porowatości następuje sprzężenie efektów giętnych z błonowymi.
7. Wprowadzono układ mnożników pozwalających na ocenę wpływu konfiguracji porowatości na wartości maksymalnych ciśnień aerodynamicznych.
8. W pracy wykazano, że możliwa jest adaptacja metod analitycznych Voighta i Bolotina do rozwiązywania w formie analitycznej zagadnień utraty stateczności dynamicznej.

7.2. Kierunki dalszych prac

Badania zaprezentowane w niniejszej rozprawie można kontynuować i rozwijać w wielu kierunkach. Kontynuacja i rozwój mogą być realizowane zarówno poprzez udoskonalanie zaproponowanego modelu numerycznego opisu relacji kinematycznych i fizycznych, jak również przez rozszerzenie podejścia optymalizacyjnego.

Poniżej zaproponowano kilka kierunków prac badawczych, które można realizować w przyszłości:

1. Sprawdzenie przydatności proponowanego modelu do opisu zjawisk, w których możliwa jest lokalna delaminacja połączona z wyboczeniem sublaminatu; przykłady tego typu nie zostały zbadane w pracy ani teoretycznie, ani doświadczalnie;
2. Badanie zjawisk utraty stateczności dynamicznej dla różnorodnych kształtów konstrukcji – płyty trójkątne, trapezoidalne, powłoki stożkowe lub cylindryczne;
3. Dołączenie do opisu możliwości modelowania właściwości mechanicznych konstrukcji sandwichowych, metamateriałów lub auksetyków;
4. Uwzględnienie innej postaci relacji fizycznych, przede wszystkim lepko-sprężystości i/lub lepko-plastyczności do opisu zachowania okładzin i wypełniacza;
5. Rozwiązywanie zadań optymalnej konstrukcji materiału dla zagadnień związanych z projektowaniem materiałów wzmacnianych nanostrukturami.

Załącznik A

Postać operatorów różniczkowych

Zakładając symetryczne laminowanie na płaszczyźnie środkowej ($B_{ij} = 0$), eliminując elementy D_{16}, D_{26} i przyjmując ruch płynu tylko wzdłuż osi x ($\vartheta_\infty = 0$), podstawową zależność można zapisać w następujący sposób:

– Hipoteza Love’a-Kirchhoffa (L-K):

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta p \end{bmatrix} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \quad (A1)$$

– Teoria poprzecznego ścinania pierwszego rzędu (FSDT):

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A2)$$

1. Płyty

W przypadku analizy płyt w ujęciu teorii FSDT operatory różniczkowe przyjmują następującą postać:

$$L_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{12} = (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x},$$

$$L_{22} = A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \bar{A}_{55}, \quad L_{35} = -\bar{A}_{55} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$L_{44} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \bar{A}_{55}, \quad L_{55} = \bar{A}_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$L_{53} = -L_{35},$$

$$L_{13} = L_{14} = L_{15} = L_{23} = L_{24} = L_{25} = L_{32} = L_{34} = L_{45} = L_{51} = L_{52} = L_{54} = 0$$

2. Powłoki cylindryczne o przekroju kołowym

$$L_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{12} = (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x},$$

$$L_{15} = A_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{22} = A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \bar{A}_{55} \frac{1}{R^2},$$

$$L_{24} = \bar{A}_{55} \frac{1}{R}, \quad L_{25} = (A_{12} + \bar{A}_{55}) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \bar{A}_{55}, \quad L_{35} = -\bar{A}_{55} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$L_{44} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \bar{A}_{55}, \quad L_{55} = \bar{A}_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - A_{22} \frac{1}{R^2},$$

$$L_{51} = -L_{15}, \quad L_{52} = -L_{25}, \quad L_{53} = -L_{35},$$

$$L_{13} = L_{14} = L_{23} = L_{32} = L_{34} = L_{45} = L_{54} = 0$$

$$F_{11} = F_{22} = \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad F_{33} = F_{44} = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$F_{55} = F_{11} - \Lambda \frac{\partial w}{\partial x}, \quad F_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, 5, \quad i \neq j$$

Załącznik B

Analityczna forma rozwiązania równania charakterystycznego (3.22)

Równanie dla wielomianu 5 rzędu można zapisać jako [64]:

$$x^5 + ax^2 + bx + c = 0$$

Wprowadzając $x = u + f$ w powyższe równanie otrzymuje się:

$$(u + f)^5 + a(u + f)^2 + b(u + f) + c = 0$$

Dalsze rozszerzenie i uporządkowanie prowadzi do poniższej postaci:

$$u^5 + 5fu^4 + 10f^2u^3 + (10f^3 + a)u^2 + (5f^4 + 2af + b)u + f^5 + af^2 + bf + c = 0$$

Wstawienie parametru g w równanie 5 rzędu i przekształcenie go w malejące potęgi parametru u daje w rezultacie równanie 6 rzędu:

$$u^6 + (5f + g)u^5 + (10f^2 + 5fg)u^4 + (10f^3 + a + 10f^2g)u^3 + [5f^4 + 2af + b + (10f^3 + a)g]u^2 + [f^5 + af^2 + bf + c + (5f^4 + 2af + b)g]u + (f^5 + af^2 + bf + c)g = 0$$

Równanie dla wielomianu 6 rzędu ($K = 6$) można zapisać jako [65]:

$$x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Równoważna postać:

$$[x^3 + b_2x^2 + (b_1 - c_1)x + b_0 - c_0][x^3 + b_2x^2 + (b_1 + c_1)x + b_0 + c_0] = 0$$

gdzie:

$$2b_2 = a_5, b_2^2 + 2b_1 = a_4, 2(b_0 + b_1b_2) = a_3, b_1^2 - 2b_0b_2 - c_1^2 = a_2, 2(b_0b_1 - c_0c_1) = a_1, b_0^2 - c_0^2 = a_0$$

Równanie dla wielomianu 8 rzędu ($K = 8$) można zapisać jako [66]:

$$x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Równoważna postać:

$$\left\{ \frac{[(x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) - p(x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0)]}{(1 - p)} \right\} \left\{ \frac{[(x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + p(x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0)]}{(1 + p)} \right\} = 0$$

gdzie:

$$\begin{aligned} [2(b_3 - c_3 p^2)/(1 - p^2)] &= a_7, \\ \{[(b_3^2 + 2b_2) - (c_3^2 + 2c_2)p^2]/(1 - p^2)\} &= a_6, \\ \{2[(b_1 + b_2 b_3) - (c_1 + c_2 c_3)p^2]/(1 - p^2)\} &= a_5, \\ \{[(b_2^2 + 2b_0 + 2b_1 b_3) - (c_2^2 + 2c_0 + 2c_1 c_3)p^2]/(1 - p^2)\} &= a_4, \\ \{2[(b_0 b_3 + b_1 b_2) - (c_0 c_3 + c_1 c_2)p^2]/(1 - p^2)\} &= a_3, \\ \{[(b_1^2 + 2b_0 b_2) - (c_1^2 + 2c_0 c_2)p^2]/(1 - p^2)\} &= a_2, \\ [2(b_0 b_1 - c_0 c_1 p^2)/(1 - p^2)] &= a_1, [(b_0^2 - c_0^2 p^2)/(1 - p^2)] = a_0 \end{aligned}$$

Równanie dla wielomianu 10 rzędu ($K = 10$) można zapisać jako [67]:

$$x^{10} + a_8 x^9 + a_7 x^8 + a_6 x^7 + a_5 x^6 + a_4 x^5 + a_3 x^4 + a_2 x^3 + a_1 x^2 + a_0 x = 0$$

Równoważna postać:

$$\begin{aligned} [(x^5 + b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) - (c_4 x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0)] \\ [(x^5 + b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) + (c_4 x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0)] = 0 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} 2b_4 &= a_8, b_4^2 + 2b_3 - c_4^2 = a_7, 2(b_2 + b_3 b_4 - c_3 c_4) = a_6, \\ b_3^2 + 2b_1 + 2b_2 b_4 - c_3^2 - 2c_2 c_4 &= a_5, 2(b_0 + b_1 b_4 + b_2 b_3 - c_1 c_4 - c_2 c_3) = a_4, \\ b_2^2 + 2b_0 b_4 + 2b_1 b_3 - c_2^2 - 2c_0 c_4 - 2c_1 c_3 &= a_3, \\ 2(b_0 b_3 + b_1 b_2 - c_0 c_3 - c_1 c_2) &= a_2, b_1^2 + 2b_0 b_2 - c_1^2 - 2c_0 c_2 = a_1, \\ 2(b_0 b_1 - c_0 c_1) &= a_0, b_0^2 - c_0^2 = 0 \end{aligned}$$

Załącznik C

Definicja stałych z charakterystycznego równania algebraicznego (6.2)

$$a_0 = D_{11}A_{11}A_{66}$$

$$a_1 = -\Lambda\beta_n^4 A_{22}A_{66}/a_0$$

$$a_2 = \left\{ -\beta_n^6 [2(D_{12} + 2D_{66})A_{22}A_{66} + D_{22}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2 - 2A_{12}A_{66})] \right. \\ \left. - \frac{\beta_n^2 A_{22}}{R^2} [(A_{11}A_{22} - A_{12}^2 - 2A_{12}A_{66}) - A_{12}(A_{12} + A_{66}) + A_{66}A_{12} + A_{11} \right. \\ \left. + A_{22}] + \beta_n^2 \rho h \omega^2 (A_{11}A_{22} - A_{12}^2 - 2A_{12}A_{66}) \right\} / a_0$$

$$a_3 = -\beta_n^2 \Lambda (A_{11}A_{22} - A_{12}^2 - 2A_{12}A_{66}) / a_0$$

$$a_4 = \left\{ \beta_n^4 [D_{11}A_{22}A_{66} + 2(D_{12} + 2D_{66})(A_{11}A_{22} - A_{12}^2 - 2A_{12}A_{66}) + D_{22}A_{11}A_{66}] \right. \\ \left. + \frac{A_{66}}{R^2} (A_{11}A_{22} - A_{12}^2) - \rho h \omega^2 A_{11}A_{66} \right\} / a_0$$

$$a_5 = -\Lambda A_{11}A_{66} / a_0$$

$$a_6 = -\beta_n^2 [D_{11}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2 - 2A_{12}A_{66}) + 2(D_{12} + 2D_{66})A_{11}A_{66}] / a_0$$

$$\lambda = \left[\beta_n^8 D_{22} A_{22} A_{66} + 2\beta_n^4 A_{66} \left(\frac{A_{22}}{R} \right)^2 - \rho h \beta_n^4 \omega^2 A_{22} A_{66} \right] / a_0$$

LITERATURA

- [1] Bazant Z.P., Cedolin L., *Stability of structures. Elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific Publishing, Singapore, 2010.
- [2] Encyklopedia fizyki, PWN, Warszawa, 1972.
- [3] Beck M., Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes, *ZAMM*, 1952, 3, 225–228.
- [4] Gajewski A., Wpływ współczynnika śledzenia na drgania i stateczność ściskanego pręta w warunkach nieliniowego pełzania, *Mechanika, Czasopismo Techniczne* 107, 4–M/2010.
- [5] Kordas Z., Życzkowski M., On the loss of stability of a rod under a super-tangential force, *Arch. Mech. Stos.*, 1963, 15(1), 7–31.
- [6] Kędziora P., Optymalne projektowanie struktur kompozytowych z warstwami piezoelektrycznymi, *Praca habilitacyjna, Seria Mechanika*, Kraków 2013.
- [7] Bolotin V.V., *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*. Pergamon Press, Oxford, 1961.
- [8] Livne E., Weisshaar T.A., Aeroelasticity of Nonconventional Airplane Configurations Past and Future, *Journal of Aircraft*, 2003, 40(6), 1047–1065.
- [9] Srinivasan A., Flutter and resonant vibration characteristics of engine blades, *ASME Journal of Engineering for Gas Turbine and Power*, 1997, 119, 742–775.
- [10] Qiaozhen Sun, Yufeng Xing, Exact eigensolutions for flutter of two-dimensional symmetric cross-ply composite laminates at high supersonic speeds, *Composite Structures*, 2018, 183, 358–370.
- [11] Youtube, kanał AIRBOYD, <https://www.youtube.com/watch?v=qpJBvQXQC2M>, dostępne na dzień 14.09.2020.
- [12] Sonmez F.O., Optimum design of composite structures: A literature survey (1969–2009), *J. Reinf. Plast. Compos.*, 2016, 36, 3–39.
- [13] Alijani F., Amabili M., Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, 58, 233–257.
- [14] Nelson H.C., Cunnigham H.J., Theoretical investigation of flutter of two-dimensional flat panels with one surface exposed to supersonic potential flow, *NASA Report 1280*, 1956.
- [15] Hedgepeth J.M., On the flutter of panels at high mach numbers, *Readers' Forum, Jour. Aero. Sci.*, 1956, 23(6), 609.
- [16] Houbolt J.C., A study of several aerothermoelastic problems of aircraft structures in high speed flight, *Ph.D. thesis, 2760*, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich 1958.
- [17] Li F.-M., Song Z.-G., Aeroelastic flutter analysis for 2D Kirchhoff and Mindlin panels with different boundary conditions in supersonic airflow, *Acta Mech.*, 2014, 225, 3339–3351.
- [18] Sawyer J.W., Flutter of elastically supported orthotropic panels including the effects of flow angle, *NASA TN D-7491*, 1974.
- [19] Bohon H.L., Flutter of flat rectangular orthotropic panels with biaxial loading and arbitrary flow direction, *NASA TN D-1949*, 1963.
- [20] Li J., Narita Y., Analysis and optimal design for supersonic composite laminated plate, *Composite Structures*, 2013, 101, 35–46.
- [21] Rossettos J.N., Tong P., Finite element analysis of vibration and flutter of cantilever anisotropic plates, *J. Appl. Mech.*, 1974, 41, 1075–1080.

- [22] Ramkumar R.L., Weisshaar T.A., Flutter of flat rectangular anisotropic plates in high Mach number supersonic flow, *J. Sound Vib.*, 1977, 50, 587–597.
- [23] Lin K.-J., Lu P.-J., Tarn J.-Q., Flutter analysis of composite panels using high-precision finite elements, *Computers & Structures*, 1989, 33(2), 561–574.
- [24] Bolotin V.V., *Inzhenerny Zbornyk*, vol. 28, Nonlinear flutter of plates and shells, 1960 (in Russian).
- [25] Stepanov R.D., Flutter of cylindrical shells and panels, *Prikl. Matemat. i Mekh. (PMM) Doklady ANSSR*, 1957, 21, 644–657 (in Russian).
- [26] Dowell E.H., Flutter of infinitely long plates and shells, part II: cylindrical shells, *AIAA J.*, 1966, 4, 1510–1518.
- [27] Olson M.D., Fung Y.C., Supersonic flutter of a circular cylindrical shell subjected to internal pressure and axial compression, *AIAA J.*, 1966, 4, 854–868.
- [28] Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Vardanyan L.A., Character of nonlinear vibrations of cylindrical shells in a supersonic gas flow, *Proc. Nat. Acad. Sc. of Armenia, Mechanics*, 2019, 72, 10–34.
- [29] Chai Y.-Y., Song Z.-G., Li F.-M., Active aerothermoelastic flutter suppression of composite laminated panels with time-dependent boundaries, *Composite Structures*, 2017, 179, 61–76.
- [30] Song Z.-G., Li F.-M., Carrera E., Hagedorn P., A new method of smart and optimal flutter control for composite laminated panels in supersonic airflow under thermal effects, *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 414, 218–232.
- [31] Friedmann P., Hanin M., Supersonic nonlinear flutter of orthotropic or isotropic panels with arbitrary flow direction, *Israel J. Technol.*, 1968, 6, 46–57.
- [32] Kouchakzadeh M.A., Rasekh M., Haddadpour H., Panel flutter analysis of general laminated composite plates, *Composite Structures*, 2010, 92, 2906–2915.
- [33] Calligeros J.M., Dugundji J., Effects of orthotropicity orientation on supersonic panel flutter, *AIAA J.*, 1963, 1, 2180–2182.
- [34] Rao J.S., *Advances in aero structures*, *Proc. Eng.*, 2016, 144, 3–25.
- [35] Kameyama M., Fukunaga H., Optimum design of composite plate wings for aeroelastic characteristics using lamination parameters, *Comput. Struct.*, 2007, 85, 213–224.
- [36] Fung Y.C., Some recent contributions to panel flutter research, *AIAA J.*, 1963, 1, 898–909.
- [37] Dowell E.H., Panel flutter: A review of the aeroelastic stability of plates and shells, *AIAA J.*, 1970, 8, 385–399.
- [38] Pettit C.L., Uncertainty quantification in aeroelasticity: Recent results and research challenges, *J. Aircr.*, 2004, 41, 1217–1229.
- [39] Muc A., Flis J., Augustyn M., Optimal design plated/shell structures under flutter constraints – A literature review, *Materials*, 2019, 12(24), 4215.
- [40] Muc A., *Optymalizacja struktur kompozytowych i procesów technologicznych ich wytwarzania. Podstawy projektowania materiału*. Wydawnictwo Księgarnia Akademicka, Kraków, 2005.
- [41] Muc A., *Mechanika kompozytów włóknistych*. Wydawnictwo Księgarnia Akademicka, Kraków 2003.
- [42] Wajs (Flis) J., Analiza mikrostruktury wyrobów gradientowych na bazie proszku żelaza ASC 100.29, Praca magisterska, Politechnika Krakowska, Kraków, 2017.

-
- [43] Thai T.H., Choi D.H., A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation, *Composites Part B Eng.*, 2012, 43, 2335–2347.
- [44] Roberts A.P., Garboczi E.J., Computation of the linear elastic properties of random porous materials with a wide variety of microstructure. *Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2002, 458, 1033–1054.
- [45] Muc A., Flis J., Closed form solutions - Analysis and optimal design of supersonic composite laminated flat plates considering mechanical and thermal effects, *Composite Structures*, 2019, 230, 111491.
- [46] Li F.M., Chen Z.B., Cao D.Q., Improving the aeroelastic flutter characteristics of supersonic beams using piezoelectric material, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 2011, 22, 615–629.
- [47] Detinko F.M., Some phenomena for lateral flutter of beams under follower load, *Int. J. Solids Struct.*, 2002, 39, 341–350.
- [48] Elfelsoufi Z., Azrar L., Buckling, flutter and vibration analyses of beams by integral equation formulations, *Comput. Struct.*, 2005, 83, 2632–2649.
- [49] Song Z.G., Li F.M., Active aeroelastic flutter analysis and vibration control of supersonic composite laminated plate, *Composite Structures*, 2012, 94, 702–713.
- [50] Wang Z.X., Qin X.S., Yang H.T.Y., Active suppression of panel flutter with piezoelectric actuators using eigenvector orientation method, *J. Sound Vib.*, 2012, 331, 1469–1482.
- [51] Vedenev V.V., Guvernyuk S.V., Zubkov A.F., Kolotnikov M.E., Experimental observation of single mode panel flutter in supersonic gas flow, *J. Sound Vib.*, 2010, 26, 764–779.
- [52] Eloy C., Souilliez C., Schouveiler L., Flutter of a rectangular plate, *J. Fluids Struct.*, 2007, 23, 904–919.
- [53] Kuo S.Y., Flutter of rectangular composite plates with variable fiber pacing, *Compos. Struct.*, 2011, 93, 2533–2540.
- [54] Tizzi S., Influence of non-linear forces on beam behavior in flutter conditions, *J. Sound Vib.*, 2003, 267, 279–299.
- [55] Wu X., Kaneko S., Linear and nonlinear analyses of sheet flutter induced by leakage flow, *J. Fluids Struct.*, 2005, 20, 927–948.
- [56] Dowell E.H., Nonlinear oscillations of a fluttering plate I, *AIAA J.*, 1966, 4, 1267–1275.
- [57] Dowell E.H., Nonlinear oscillations of a fluttering plate II, *AIAA J.*, 1967, 5, 1856–1862.
- [58] Navazi H.M., Haddadpour H., Nonlinear aero-thermoelastic analysis of homogeneous and functionally graded plates in supersonic airflow using coupled models, *Composite Structures*, 2011, 93, 2554–2565.
- [59] Xue D.Y., Mei C., Finite element nonlinear flutter and fatigue life of two-dimensional panels with temperature effects, *J. Aircr.*, 1993, 3, 993–1000.
- [60] Koo K.N., Hwang W.S., Effects of hysteretic and aerodynamic damping on supersonic panel flutter of composite plates, *J. Sound Vib.*, 2004, 273, 569–583.
- [61] Li F.-M., Song Z.-G., Flutter and thermal buckling control for composite laminated panels in supersonic flow, *J. Sound Vib.*, 2013, 332(22), 5678–5695.
- [62] Song Z.-G., Li F.-M., Investigations on the flutter properties of supersonic panels with different boundary conditions, *Int. J. Dynam. Cont.*, 2014, 2(3), 346–353.

-
- [63] Song Z.-G., Li F.-M., Flutter and buckling characteristics and active control of sandwich panels with triangular lattice core in supersonic airflow, *Compos. B Eng.*, 2017,108, 334–344.
- [64] Chai Y.Y., Song Z.-G., Li F.-M., Investigations on the influences of elastic foundations on the aerothermoelastic flutter and thermal buckling properties of lattice sandwich panels in supersonic airflow, *Acta Astronaut.*, 2017, 140, 176–189.
- [65] Shao C., Cao D., Xu Y., Zhao H., Flutter and thermal buckling analysis for composite laminated panel embedded with shape memory alloy wires in supersonic flow, *Int. J. Aerospace Eng.*, 2016, 7, 1–12.
- [66] Zhao H., Cao D., Supersonic flutter of laminated composite panel in coupled multifields, *Aerosp. Sci. Technol.*, 2015, 47, 75–85.
- [67] Muc A., Flis J., Free vibrations and supersonic flutter of multilayered laminated cylindrical panels, *Composite Structures*, 2020, 246, 112400.
- [68] Grover N., Singh B.N., Maiti D.K., An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates, *Aerosp. Sci. Technol.*, 2016, 52, 41–51.
- [69] Kuo S.Y., Aerothermoelastic analysis of composite laminates with variable fiber spacing, *Comp. Mater. Sci.*, 2014, 91, 83–90.
- [70] Ghoman S.S., Azzouz M., Supersonic aerothermoelastic nonlinear flutter study of curved panels: frequency domain, *J. Aircraft*, 2012, 49(4), 1075–1090.
- [71] Ibrahim H.H., Yoo H.H., Lee K.S., Supersonic flutter of functionally graded panels subject to acoustic and thermal loads, *J. Aircraft*, 2009, 46(2), 593–600.
- [72] Marques F.D., Natarajan S., Ferreira A.J.M., Evolutionary-based aeroelastic tailoring of stiffened laminate composite panels in supersonic flow regime, *Composite Structures*, 2017, 167, 30–37.
- [73] Moita J.S., Correia V.F., Mota Soares C.M., Herskovits J., Higher-order finite element models for the static linear and nonlinear behavior of functionally graded material plate-shell structures, *Composite Structures*, 2019, 212, 465–475.
- [74] Altenbach H., Altenbach J., Kissing W., *Mechanics of Composite Structural Elements*. Springer, 2004.
- [75] Flis J., Muc A., Analytical solutions of supersonic flutter problems for laminated multilayered composite plates and cylindrical shells, *Vibrations in Physical Systems*, 2020, accepted.
- [76] Muc A., Natural frequencies of rectangular laminated plates - Introduction to optimal design in aeroelastic problems, *Aerospace*, 2018, 5(3), 95.
- [77] Muc A., Non-local approach to free vibrations and buckling problems for cylindrical nano-structures, *Composite Structures*, 2020, 250, 12541.
- [78] Kulkarni R.G., Insert a root to extract a root of quintic quickly, *Annales Mathematicae Silesianae*, 2019, 33, 153–158.
- [79] Kulkarni R.G., Solving sextic equations, *Atlantic Electronic Journal of Mathematics*, 2008, 3(1), 56–60.
- [80] Kulkarni R.G., On the solution to octic equations, *The Montana Mathematics Enthusiast*, 2007, 4(2), 193–209.
- [81] Kulkarni R.G., On the solution to nonic equations, *Alabama Journal of Mathematics*, 2008, 1–19.
- [82] Olson M.D., Finite elements applied to panel flutter, *AIAA J.*, 1967, 5(12), 2267–2270.

-
- [83] Bismarck-Nasr M.N., Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells, *Appl. Mech. Rev.*, 1992, 45(12), 461–482.
- [84] Bismarck-Nasr M.N., Finite elements in aeroelasticity of plates and shells, *Appl. Mech. Rev.*, 1996, 49(10), 17–24.
- [85] Chen P.C., Zhang Z., Sengupta A., Liu D., Overset Euler/Boundary-Layer solver with panel-based aerodynamic modeling for aeroelastic applications, *Journal of Aircraft*, 2009, 46(6), 2054–2068.
- [86] Zhang Z., Chen P.C., Yang S., Wang Z., Wang Q., Unsteady aerostructure coupled adjoint method for flutter suppression, *AIAA Journal*, 2015, 53(8), 2121–2129.
- [87] Flis J., Augustyn M., Muc A., Divergence and flutter of multilayered laminated structures, *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, accepted.
- [88] Albano E., Rodden W.P., A Doublet-Lattice Method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows, *AIAA J.*, 1969, 7(2).
- [89] Kalman T.P., Rodden W.P., Giesing J.P., Application of the Doublet-Lattice Method to nonplanar configurations in subsonic flow, *J. of Airc.*, 1971, 8(6), 406–413.
- [90] Rodden W.P., Giesing J.P., Kalman T.P., Refinement of the nonplanar aspects of the subsonic Doublet-Lattice Lifting Surface Method, *J. of Airc.*, 1972, 9(1), 69–73.
- [91] Barai A., Durvasula S., Calculation of generalized aerodynamic forces on oscillating wings in compressible subsonic flow using Doublet-Lattice Method, Report no. AE 410 S, Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Science, Bangalore, India, 1988.
- [92] Muc A., Evolutionary design of engineering construction, *Lat. Am. J. Solids Struct.*, 2018, 15.
- [93] Kirsch U., Optimal topologies of structures, *Appl. Mech. Rev.*, 1989, 42, 223–239.
- [94] Kirsch U., *Design oriented analysis of structures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holandia, 2002.
- [95] Rozvany G.I.N., Bendsøe M.P., Kirsch U., Layout optimization of structures, *Appl. Mech. Rev.*, 1995, 48, 41–118.
- [96] Bendsøe M.P., Kikuchi N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1988, 71, 197–224.
- [97] Bendsøe M.P., Optimal shape design as a material distribution problem, *Struct. Optim.*, 1989, 1, 193–202.
- [98] Bendsøe M.P., Sigmund O., *Topology optimization. Theory, methods and applications*. Springer, Berlin, Niemcy, 2004.
- [99] Lovejoy A.E., Natural frequencies and an atlas of mode shapes for generally laminated, thick, skew, trapezoidal plates, Master's Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, USA, 1994.
- [100] Fantuzzi N., Tornabene F., Baccocchi M., Ferreira A.J.M., On the convergence of laminated composite plates of arbitrary shape through finite element models, *J. Compos. Sci.*, 2018, 2, 16.
- [101] Yu Y.-Y., *Vibrations of elastic plates: linear and nonlinear dynamical modeling of sandwiches, laminated composites, and piezoelectric layers*. Springer, New York, NY, USA, 1996.
- [102] Kapania R.K., Raciti S., Recent advances in analysis of laminated beams and plates. Part II: Vibrations and wave propagation, *AIAA J.*, 1989, 27, 935–945.
- [103] Reddy J.N., Khdeir A.A., Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories, *AIAA J.*, 1989, 27, 1809–1817.

-
- [104] Tornabene F., Fantuzzi N., Bacciocchi M., Viola E., Higher-order theories for the free vibrations of doubly-curved laminated panels with curvilinear reinforcing fibers by means of a local version of the GDQ method, *Compos. Part B Eng.*, 2015, 81, 196–230.
- [105] Tornabene F., Fantuzzi N., Bacciocchi M., Foam core composite sandwich plates and shells with variable stiffness: Effect of the curvilinear fiber path on the modal response,
- [106] Grandhi R., Structural optimization with frequency constraints—A review, *AIAA J.* 1993, 31, 2296–2303.
- [107] Szyszkowski W., King J.M., Optimization of frequencies spectrum in vibrations of flexible structures, *AIAA J.*, 1993, 31, 2163–2168.
- [108] Bert C.W., Optimal design of a composite material plate to maximize its fundamental frequency, *J. Sound Vib.*, 1977, 50, 229–237.
- [109] Bert C.W., Design of clamped composite-material plates to maximize fundamental frequency, *J. Mech. Des.*, 1978, 100, 274–278.
- [110] Reiss R., Ramachandran S., Maximum frequency design of symmetric angle-ply laminates, *Comput. Struct.*, 1987, 4, 476–487.
- [111] Grenestedt J.L., Layup optimization and sensitivity analysis of the fundamental eigenfrequency of composite plates, *Composite Structures*, 1989, 12, 193–209.
- [112] Wright J.R., Cooper J.E., *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2007.
- [113] Chowdary T.V., Sinha P.K., Parthan S., Finite element flutter analysis of composite skew panels, *Comput. Struct.*, 1996, 58, 613–620.
- [114] Forster E.E., Yang H.T., Flutter control of wing boxes using piezoelectric actuators, *J. Aircraft*, 1998, 35, 949–957.
- [115] Guo S., Aeroelastic optimization of an aerobatic aircraft wing structure, *Aerosp. Sci. Technol.*, 2007, 11, 396–404.
- [116] Li J., Narita Y., Multi-objective design for aeroelastic flutter of laminated shallow shells under variable flow angles, *Compos. Struct.*, 2014, 111, 530–539.
- [117] Vijay B.V., Durvasula S., Supersonic flutter of composite skin panels of repeated-sublaminated layup, *Compos. Struct.*, 1998, 41, 121–135.
- [118] Muc A., Ulatowska A., Local fibre reinforcement of holes in composite multilayered plater, *Compos. Struct.*, 2012, 94, 1413–1419.
- [119] Muc A., Ulatowska A., Design of plates with curved fibre format, *Compos. Struct.*, 2010, 92, 1728–1733.
- [120] Muc A., *Optimization of composite topology for doubly-curved laminated shells under buckling constraints*. In: *Optimal design with advanced materials*. Pedersen, P., Ed.; Elsevier Science, Lyngby, Denmark, 1993.
- [121] Hirano Y., Todoroki A., Stacking sequence optimizations for composite laminates using fractal branch and bound method: Application for supersonic panel flutter problem with buckling load condition, *Adv. Compos. Mater.*, 2004, 13, 89–106.
- [122] Hirano Y., Todoroki A., Stacking-sequence optimization of composite delta wing to improve flutter limit using fractal branch and bound method, *JSME Int. J.*, 2005, 48, 65–72.
- [123] Guo S., Cheng W., Cui D., Aeroelastic tailoring of composite wing structures by laminate layup optimization, *AIAA J.*, 2006, 44, 3146–3150.
- [124] Rajendran I., Vijayarangan S., Simulated annealing approach to the optimal design of automotive suspension systems, *Int. J. Veh. Des.*, 2007, 43, 11–30.

- [125] Jong-Sun K., Changho N., H_{∞} control for flutter suppression of a laminated plate with self-sensing actuators, *KSME J.*, 1996, 10, 169–179.
- [126] Hertz T.J., Shirk M.H., Ricketts R.H., Weisshaar T.A., Aeroelastic Tailoring with composites applied to forward swept wings. In Proceedings of the 5th DOD/NASA Conference on Fibrous Composites in Structural Design, New Orleans, LA, USA, 27–29 January 1981.
- [127] McIntosh S.C.J., Ashley H., On the optimization of discrete structures with aeroelastic constraints, *Comput. Struct.*, 1978, 8, 411–419.
- [128] Triplet W.E., Aeroelastic tailoring studies in fighter aircraft design, *J. Aircr.*, 1980, 17, 508–513.
- [129] Abdalla M.M., Breuker R.D., Gürdal Z., Aeroelastic tailoring of variable-stiffness slender wings for minimum compliance. In Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Stockholm, Sweden, 18–20 June 2007.
- [130] Gao P., Zhang Z., Design variables and constraint derivatives in aeroelastic tailoring, *Acta Aeronaut. Astronaut. Sin.*, 1991, 12, 647–650.
- [131] Patil M.J., Aeroelastic tailoring of composite box beams. In Proceedings of the 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, USA, 6–9 January 1997.
- [132] Attaran A., Majid D.L., Basri, S., Mohd Rafie A.S., Abdullah E.J., Structural optimization of an aeroelastically tailored composite flat plate made of woven fiberglass/epoxy, *Acta Mech.*, 2008, 196, 161–173.
- [133] Kuttentkeuler J., Ringertz U., Aeroelastic design and optimization with experimental verification, *J. Aircr.*, 1998, 35, 505–507.
- [134] Guo S., Banerjee J.R., Cheung C.W., The effect of laminate lay-up on the flutter speed of composite wings, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part G J. Aerosp. Eng.*, 2003, 217, 115–122.
- [135] Guo S., Chen W., Cui D., Optimization of composite wing structures for maximum flutter speed. In Proceedings of the 1st AIAA Multidisciplinary Design Optimization Specialist Conference, the 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Austin, TX, USA, 18–21 April 2005; Paper No. AIAA-2005-2132.
- [136] Guo S., Cheung C.W., Banerjee J.R., Butler R., gust alleviation and flutter suppression of an optimized composite wing. In Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Manchester, UK, 26–28 June 1995.
- [137] Lillico M., Butler R., Banerjee J.R., Guo S., Optimum design of high aspect ratio wings subject to aeroelastic constraints. In Proceedings of the 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, New Orleans, LA, USA, 10–13 April 1995.
- [138] Werter N.P.M., Breuker R.D., Aeroelastic tailoring and structural optimization using an advanced dynamic aeroelastic framework. In Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Saint Petersburg, Russia, 28 June–2 July 2015.
- [139] Liu X.N., Xiang J.W., Study of aeroelastic tailoring of high aspect ratio flexible composite wing, *Acta Aeronaut. Astronaut. Sin.*, 2006, 32, 1403–1407.
- [140] Isogai K., Direct search method to aeroelastic tailoring of a composite wing under multiple constraints, *J. Aircr.*, 1989, 26, 1076–1080.
- [141] Bach C., Jebari R., Viti A., Hewson R., Composite stacking sequence optimization for aeroelastically tailored forward-swept wings, *Struct. Multidiscip. Optim.*, 2017, 55, 105–119.

- [142] Berci M., Gaskell P., Hewson R., Toropov V., Multifidelity metamodel building as a route to aeroplastic optimization of flexible wings, *Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, 2011, 2115–2137.
- [143] Berci M., Gaskell P., Hewson R., Toropov V., A semi-analytical model for the combined aeroelastic behaviour and gust response of a flexible aerofoil, *J. Fluids Struct.*, 2013, 38, 3–21.
- [144] Berci M., Gaskell P., Hewson R., Toropov V., Multidisciplinary multifidelity optimization of a flexible wing aerofoil with reference to a small UAV, *Struct. Multidiscip.*, 2014, 50, 683–699.
- [145] Jebari R., Composite stacking sequence optimization and aeroelastic tailoring of a forward-swept wing. Master's Thesis, Imperial College London, London, UK, 2015.
- [146] Rikards R.B., Teters G.A., *Stability of composite shells*. Zinatne, Riga, Latvia, 1974 (In Russian).
- [147] Muc A., Trzebicki M., New trends in optimal design of composite materials. In *Proceedings of the XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM)*, Warsaw, Poland, 15–21 August 2005; Springer, Warsaw, Poland.
- [148] Muc A., Gurba W., Genetic algorithms and finite element analysis in optimization of composite structures, *Compos. Struct.*, 2001, 54, 275–281.
- [149] Stodieck O., Cooper J.E., Weaver P.M., Kealy P., Improved aeroelastic tailoring using tow-steered composites, *Compos. Struct.*, 2013, 106, 703–715.
- [150] Stodieck O., Cooper J.E., Weaver P.M., Optimization of tow-steered composite wing laminates for aeroelastic tailoring, *AIAA J.*, 2015, 53, 2203–2215.
- [151] Stodieck O., Cooper J.E., Weaver P.M., Aeroelastic tailoring of a representative wing box using tow-steered composites, *AIAA J.*, 2017, 55, 1425–1439.
- [152] Haddadpour H., Zamani Z., Curvilinear fiber optimization to ols for aeroelastic design of composite wings, *J. Fluid Struct.*, 2012, 33, 180–190.
- [153] Stanford B., Jutte C.V., Wu K.C., Aeroelastic benefits of tow steering for composite plates, *Compos. Struct.*, 2014, 118, 416–422.
- [154] Guimarães T.A.M., Castro S.G.P., Cesnik C.E.S., Rade, D.A., Supersonic flutter and buckling optimization of towed-steered composite plates, *AIAA J.*, 2019, 57, 397–407.
- [155] Akhavan H., Ribeiro P., Aeroelasticity of composite plates with curvilinear fibres in supersonic flow, *Compos. Struct.*, 2018, 194, 335–344.
- [156] Khalafi V., Fazilati J., Supersonic panel flutter of variable stiffness composite laminated skew panels subjected to yawed flow by using NURBS-based isogeometric approach, *J. Fluid Struct.*, 2018, 82, 198–214.
- [157] Ouyang X.S., Liu Y., Supersonic flutter of tow-steered composite laminates, *Acta Aeronaut. Astronaut. Sin.*, 2018, 39, 221539 (In Chinese).
- [158] Sohn K.J., Kim J.H., Nonlinear thermal flutter of functionally graded panels under a supersonic flow, *Compos. Struct.*, 2009, 88, 380–387.
- [159] Muc A., Muc-Wierzgoń M., An evolution strategy in structural shape optimization problems for plates and shells, *Compos. Struct.*, 2012, 94(4), 1461–1470.
- [160] Muc A., Choice of design variables in the stacking sequence optimization for laminated structures, *Mech. Comp. Materials*, 2016, 52(2), 211–224.
- [161] Muc A., Design of blended/tapered multilayered structures subjected to buckling constraints, *Compos. Struct.*, 2018, 186, 256–266.
- [162] De Leon D.M., De Souza C.E., Fonseca J.S.O., Da Silva R.G.A., Aeroelastic tailoring using fiber orientation and topology optimization, *Struct. Multidiscip. Optim.*, 2012, 46, 663–677.

-
- [163] Lee S.L., Kim J.H., Thermal post-buckling and the stability boundaries of structurally damped functionally graded panels in supersonic airflows, *Compos. Struct.*, 2010, 92, 422–429.
- [164] Prakash T., Ganapathi M., Supersonic flutter characteristics of functionally graded flat panels including thermal effects, *Compos. Struct.*, 2006, 72, 10–18.
- [165] Prakash T., Ganapathi M., Asymmetric flexural vibration and thermoelastic stability of FGM circular plates using finite element method, *Compos. Part B Eng.*, 2006, 37, 642–649.
- [166] Ibrahim H.H., Tawfik M., Al-Ajmi M., Thermal buckling and nonlinear flutter behavior of functionally graded material panels, *J. Aircr.*, 2007, 44, 1610–1618.
- [167] Ibrahim H.H., Tawfik M., Al-Ajmi M., Non-linear panel flutter for temperature dependent functionally graded material panels, *Comput. Mech.*, 2008, 41, 325–334.
- [168] Navazi H.M., Haddadpour H., Aero-thermoelastic stability of functionally graded plates, *Compos. Struct.*, 2007, 80, 580–587.
- [169] Haddadpour H., Navazi H.M., Shadmehri F., Nonlinear oscillations of a fluttering functionally graded plate, *Compos. Struct.*, 2007, 79, 242–250.
- [170] Peng J., Xiaoping Z., Flutter characteristic study of composite sandwich panel with functionally graded foam core, *Int. J. Aerosp. Eng.*, 2016, 2016, 7971435.
- [171] Dunning P.D., Stanford B.K., Kim H.A., Jutte C.V., Aeroelastic tailoring of a plate wing with functionally graded materials, *J. Fluids Struct.*, 2014, 51, 292–312.
- [172] Liang L., Lia W.-H., Zhang D., Zhang Y., Vibration control and analysis of a rotating flexible FGM beam with a lumped mass in temperature field, *Compos. Struct.*, 2019, 208, 244–260.
- [173] Ghorbanpour A., Soleymani T., Size-dependent vibration analysis of an axially moving sandwich beam with MR core and axially FGM faces layers in yawed supersonic airflow, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2019, 77, 103792.
- [174] Tornabene F., On the critical speed evaluation of arbitrarily oriented rotating doubly-curved shells made of functionally graded materials, *Thin-Walled Struct.*, 2019, 140, 85–98.
- [175] Su Z., Wang L., Sun K., Wang D., Vibration characteristic and flutter analysis of elastically restrained stiffened functionally graded plates in thermal environment, *Int. J. Mech. Sci.*, 2019, 157–158, 872–884.
- [176] Yang S.W., Zhang W., Hao Y.X., Niu Y., Nonlinear vibrations of FGM truncated conical shell under aerodynamics and in-plane force along meridian near internal resonances, *Thin-Walled Struct.*, 2019, 142, 369–391.
- [177] Sobhy M., Zenkour A.M., Porosity and inhomogeneity effects on the buckling and vibration of double-FGM nanoplates via a quasi-3D refined theory, *Compos. Struct.*, 2019, 220, 289–303.
- [178] Trinh M.-C., Nguyen D.-D., Kim S.-E., Effects of porosity and thermomechanical loading on free vibration and nonlinear dynamic response of functionally graded sandwich shells with double curvature, *Aerosp. Sci. Technol.*, 2019, 87, 119–132.
- [179] Bahaadini R., Saidi A.R., Aerothermoelastic flutter analysis of pre-twisted thin-walled rotating blades reinforced with functionally graded carbon nanotubes, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2019, 75, 285–306.
- [180] Song Z., Chen Y., Li Z., Sha, J., Li F., Axially functionally graded beams and panels in supersonic airflow and their excellent capability for passive flutter suppression, *Aerosp. Sci. Technol.*, 2019, 92, 668–675.

- [181] Liu H., Lv Z., Tang H., Nonlinear vibration and instability of functionally graded nanopipes with initial imperfection conveying fluid, *Appl. Math. Model.*, 2019, 76, 133–150.
- [182] Zhu Y., Shi P., Kang Y., Cheng B., Isogeometric analysis of functionally graded plates with a logarithmic higher order shear deformation theory, *Thin-Walled Struct.*, 2019, 144, 106234.
- [183] Tang Y., Yang T., Post-buckling behavior and nonlinear vibration analysis of a fluid-conveying pipe composed of functionally graded material, *Compos. Struct.*, 2018, 185, 393–400.
- [184] Zhou K., Huang X., Tian J., Hua H., Vibration and flutter analysis of supersonic porous functionally graded material plates with temperature gradient and resting on elastic foundation, *Compos. Struct.*, 2018, 204, 63–79.
- [185] Chwał M., Muc A., Buckling and free vibrations of nanoplates-comparison of nonlocal strain and stress approaches, *Appl. Sci.*, 2019, 9, 1409.
- [186] Muc A., Modelling of carbon nanotubes behavior with the use of a thin shell theory, *J. Theor. Appl. Mech.*, 2011, 49, 531–540.
- [187] Matin M.R., Mirdamadi H.R., Ghayour M., Effects of nonlocal elasticity and slip condition on vibration of nano-plate coupled with fluid flow, *Phys. E Low-Dimens. Syst. Nanostruct.*, 2013, 48, 85–95.
- [188] Eltaher M.A., Khater M.E., Emam S.A., A review on nonlocal elastic models for bending, buckling, vibrations and wave propagation of nanoscale beams, *Appl. Math. Model.*, 2016, 40, 4109–4128.
- [189] Asadi H., Souri M., Wang Q., A numerical study on flow-induced instabilities of supersonic FG-CNT reinforced composite flat panels in thermal environments, *Compos. Struct.*, 2017, 171, 113–125.
- [190] Asadi H., Numerical simulation of the fluid-solid interaction for CNT reinforced functionally graded cylindrical shells in thermal environments, *Acta Astronaut.*, 2018, 138, 214–224.
- [191] Mehri M., Asadi H., Wang Q., On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow, *Compos. Struct.*, 2016, 153, 938–951.
- [192] Mehri M., Asadi H., Kouchakzadeh M.A., Computationally efficient model for flow-induced instability of CNT reinforced functionally graded truncated conical curved panels subjected to axial compression, *Comput. Methods Appl. Mech. Energy*, 2017, 318, 957–980.
- [193] Zhang L.W., Song Z.-G., Liew K.M., Modeling aerothermoelastic properties and active flutter control of nanocomposite cylindrical shells in supersonic airflow under thermal environments, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2017, 325, 416–433.
- [194] Song Z.-G., Zhang L.W., Liew K.M., Active vibration control of CNT reinforced functionally graded plates based on a higher-order shear deformation theory, *Int. J. Mech. Sci.*, 2015, 105, 90–101.
- [195] Song Z.-G., Zhang L.W., Liew K.M., Optimal shape control of CNT reinforced functionally graded composite plates using piezoelectric patches, *Compos. Part B*, 2016, 85, 140–149.
- [196] Song Z.-G., Zhang L.W., Liew K.M., Aeroelastic analysis of CNT reinforced functionally graded composite panels in supersonic airflow using a higher-order shear deformation theory, *Compos. Struct.*, 2016, 141, 79–90.

-
- [197] Sadeghi-Goughari M., Jeon S., Kwon H.-J., Flutter instability of cantilevered carbon nanotubes caused by magnetic fluid flow subjected to a longitudinal magnetic field, *Phys. E Low-Dimens. Syst. Nanostruct.*, 2018, 98, 184–190.
- [198] Xiao Q.-X., Li X.-F., Flutter and divergence instability of rectangular plates under nonconservative forces considering surface elasticity, *Int. J. Mech. Sci.*, 2018, 149, 254–261.
- [199] Bahaadini R., Hosseini M., Jamalpoor A., Nonlocal and surface effects on the flutter instability of cantilevered nanotubes conveying fluid subjected to follower forces, *Phys. B Condens. Matter*, 2017, 509, 55–61.
- [200] Muc A., Optimization of composite thinwalled structures-pitfalls for researches. In *Proceedings of the First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Germany, 28 May–2 June 1995.
- [201] Chwał M., Muc A., Design of reinforcement in nano- and microcomposites, *Materials*, 2019, 12, 1474.
- [202] Skinner S.N., Zare-Behtash H., State-of-the-art in aerodynamic shape optimization methods, *Appl. Soft Comput.*, 2018, 62, 933–962.
- [203] Yang C., Yang Y.X., Wu Z.G., Shape sensitivity analysis of flutter characteristics of a low aspect ratio supersonic wing using analytical method, *Sci. China Technol. Sci.*, 2012, 55, 3370–3377.
- [204] Lv B., Tan S.G., Yang C., Optimization design for aeroelastic dynamics of T-tail, *J. Beijing Univ. Aeronaut. Astronaut.*, 2007, 33, 409–413.
- [205] Yang C., Xiao Z.P., Aeroelastic optimization design for wing with maneuver load uncertainties., *Sci. China Technol. Sci.*, 2010, 53, 3102–3109.
- [206] Wu Q., Wan Z.Q., Yang C., Design optimization of flutter scaled model considering structural dynamic and flutter constraints, *Acta Aeronaut. Astronaut. Sin.*, 2011, 32, 1210–1216.
- [207] Butler R., Banerjee J.R., Optimum design of bending-torsion coupled beams with frequency or aeroelastic constraints, *Comput. Struct.*, 1996, 60, 715–724.
- [208] Furuya H., Fukuchi I., Kogiso N., Evolutionary optimization for simultaneous design on supersonic flutter and structural mass. In *Proceedings of the 9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, Atlanta, GA, USA, 4–6 September 2002.
- [209] Stroud W.J., Krishnamurthy T., Mason B.H., Smith S.A., Naster A.S., Probabilistic design of a plate-like wing to meet flutter and strength requirement. In *Proceedings of the 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Denver, CO, USA, 22–25 April 2002.
- [210] Kim T., Lim J., Shin S., Kim D.-H., Structural design optimization of a tilt rotor aircraft composite wing to enhance whirl flutter stability, *Compos. Struct.*, 2013, 95, 283–294.
- [211] Acree C.W., Peyran R.J., Johnson W., Rotor design options for improving XV-15 whirl-flutter stability margins, *NASA Technical Paper TP-212262*, Washington, DC, USA, 2004.
- [212] Paik J., Gandhi F., Design optimization for improved soft in-plane tilt rotor aeroelastic stability in airplane mode, *J. Aircr.*, 2010, 47, 1089–1099.
- [213] Mueller J.P., Gourinat Y., Ferrer R., Krysinski T., Kerdreux B., A numerical study on active control for tilt rotor whirl flutter stability augmentation, *J. Am. Helicopter Soc.*, 2006, 51, 244–254.

- [214] Park J.-S., Jung S.N., Lee M.-K., Kim J.M., Design optimization framework for tilt rotor composite wings considering whirl flutter stability, *Compos. Part B*, 2010, 41, 257–267.
- [215] Bao C., Dai Y., Wang P., Tang G., A piezoelectric energy harvesting scheme based on stall flutter of airfoil section, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 2019, 75, 119–132.
- [216] Abdullatif M., Ranjan Mukherjee, Divergence and flutter instabilities of a cantilever beam subjected to a terminal dynamic moment, *J. Sound Vib.*, 2019, 455, 402–412.
- [217] Zhu B., Chen X., Dong Y., Li Y., Stability analysis of cantilever carbon nanotubes subjected to partially distributed tangential force and viscoelastic foundation, *Appl. Math. Model.*, 2019, 73, 190–209.
- [218] Cisonni J., Lucey A.D., Elliott N.S.J., Flutter of structurally inhomogeneous cantilevers in laminar channel flow, *J. Fluids Struct.*, 2019, 90, 177–189.
- [219] Kiani K., Divergence and flutter instabilities of nanobeams in moving state accounting for surface and shear effects, *Comput. Math. Appl.*, 2019, 77, 2764–2785.
- [220] Bahaadini R., Saidi A.R., Mohammad Hosseini, On dynamics of nanotubes conveying nanoflow, *Int. J. Eng. Sci.*, 2018, 123, 181–196.
- [221] Zhou X., Huang K., Li Z., Effects of bend-twist coupling on flutter limits of composite wind turbine blades, *Compos. Struct.*, 2018, 192, 317–326.
- [222] Pacheco D.G.Q., Ferreira A.J.M., Marques F.D., On the effects of structural coupling on the supersonic flutter and limit cycle oscillations of transversely reinforced panels, *J. Fluids Struct.*, 2018, 79, 158–170.
- [223] Deivasigamani A., McCarthy J.M., John S., Watkins S., Trivailo P., Coman F., Flutter of cantilevered interconnected beams with variable hinge positions, *J. Fluids Struct.*, 2013, 38, 223–237.
- [224] Maraghi Z.K., Flutter and divergence instability of nanocomposite sandwich plate with magnetostrictive face sheets, *J. Sound Vib.*, 2019, 457, 240–260.
- [225] Nitschke C., Vincenti A., Chassaing J.-C., Influence of stochastic perturbations of composite laminate layups on the aeroelastic flutter of a cantilevered plate wing, *Compos. Struct.*, 2019, 220, 809–826.
- [226] Zhong Z., Liu A., Pi Y., Deng J., Lu H., Li S., Analytical and experimental studies on dynamic instability of simply supported rectangular plates with arbitrary concentrated masses, *Eng. Struct.*, 2019, 196, 109288.
- [227] Zhou K., Huang X., Zhang Z., Hua H., Aero-thermo-elastic flutter analysis of coupled plate structures in supersonic flow with general boundary conditions. *J. Sound Vib.*, 2018, 430, 36–58.
- [228] Teifouet M., Robinson A., Adal S., Effects of the thickness on the stability of axially moving viscoelastic rectangular plates. *Appl. Acoust.*, 2018, 140, 315–326.
- [229] Li H., Pang F., Miao X., Gao S., Liu F., A semi analytical method for free vibration analysis of composite laminated cylindrical and spherical shells with complex boundary conditions, *Thin-Walled Struct.*, 2019, 136, 200–220.
- [230] Li X., Li Y.H., Xie T.F., Vibration characteristics of a rotating composite laminated cylindrical shell in subsonic air flow and hygrothermal environment, *Int. J. Mech. Sci.*, 2019, 150, 356–368.
- [231] Mokhtari M., Permoon M.R., Haddadpour H., Aeroelastic analysis of sandwich cylinder with fractional viscoelastic core described by Zener model, *J. Fluids Struct.*, 2019, 85, 1–16.

- [232] Khudayarov B.A., Turaev F.Z., Nonlinear supersonic flutter for the viscoelastic orthotropic cylindrical shells in supersonic flow, *Aerosp. Sci. Technol.*, 2019, 84, 120–130.
- [233] Mahmoudkhani S., Aerothermoelastic analysis of imperfect FG cylindrical shells in supersonic flow, *Compos. Struct.*, 2019, 225, 111160.
- [234] Zippo A., Barbieri M., Pellicano F., Temperature gradient effect on dynamic properties of a polymeric circular cylindrical shell, *Compos. Struct.*, 2019, 216, 301–314.
- [235] Muc A., Buckling and post-buckling behaviour of laminated shallow spherical shells subjected to external pressure, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1992, 27, 465–476.
- [236] Ansari R., Torabi J., Faghieh Shojaei M., Vibrational analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite spherical shells resting on elastic foundation using the variational differentialquadrature method, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2016, 60, 166–182.
- [237] Mohammadi N., Asadi H., Aghdam M.M., An efficient solver for fully coupled solution of interaction between incompressible fluid flow and nanocomposite truncated conical shells, *Comput. Methods Appl. Mech.Eng.*, 2019, 351, 478–500.
- [238] Kerboua Y., Lakis A.A., Hmila M., Vibration analysis of truncated conical shells subjected to flowing fluid, *Appl. Math. Model.*, 2010, 34, 791–809.
- [239] Sabri F., Lakis A.A., Hybrid finite element method applied to supersonic flutter of an empty or partially liquid-filled truncated conical shell, *J. Sound Vib.*, 2010, 329, 302–316.
- [240] Setoodeh A.R., Tahani M., Selahi E., Transient dynamic and free vibration analysis of functionally graded truncated conical shells with non-uniform thickness subjected to mechanical shock loading, *Compos.Part B Eng.*, 2012, 43, 2161–2171.
- [241] Rahmanian M., Firouz-Abadi R.D., Cigeroglu E., Dynamics and stability of conical/cylindrical shells conveying subsonic compressible fluid flows with general boundary conditions, *Int. J. Mech. Sci.*, 2017, 120, 42–61.
- [242] Singha M.K., Mandal M., Supersonic flutter characteristics of composite cylindrical panels, *Compos. Struct.*, 2008, 82, 295–301.
- [243] Amabili M., Pellicano F., Non-linear supersonic flutter of circular cylindrical shells, *AIAA J.*, 2001, 39, 564–573.
- [244] Kurilov E.A., Mikhlin Y.V., Nonlinear vibrations of cylindrical shells with initial imperfections in a supersonic flow, *Int. Appl. Mech.*, 2007, 43, 1000–1008.
- [245] Kumar B., De Remer D., Marshall D., *An Illustrated Dictionary of Aviation*. McGraw-Hill, New York, NY, USA, 2005.
- [246] Försching H.W., *Grundlagen der Aeroelastik*. Springer, Berlin, Germany, 1974.
- [247] Muc A., Kędziora P., Stawiarski A., Buckling enhancement of laminated composite structures partially covered by piezoelectric actuators, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2019, 73, 112–125.
- [248] NISA II User's Manual; Engineering Mechanics Research Corporation: Troy, MI, USA, 1993.
- [249] Leissa A.W., Free vibrations of rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, 1973, 31(3), 257–293.
- [250] Ghahkoshi-Barkh H., Razavi S., A simple analytical model for free vibrations of orthotropic and functionally graded plates, *Alexandria Engineering Journal*, 2018, 57, 595–607.

- [251] Muc A., Optimal design of composite multilayered plated and shell structures, *Thin-Walled Struct.*, 2007, 45, 816–820.
- [252] Muc A., Muc-Wierzgoń M., Discrete optimization of composite structures under fatigue constraints, *Compos. Struct.*, 2015, 133, 834–839.
- [253] Dixon I.R., Mei C., Finite element analysis of nonlinear flutter of composite panels, *Proc. AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd structures, structural dynamics and materials conf.*, Baltimore, Maryland, 1991, 2002-2010.
- [254] Muc A., Peculiarities in the material design of buckling resistance for tensioned laminated composite panels with elliptical cut-outs, *Materials*, 2018, 11, 1019.
- [255] Muc A., Chwał M., Analytical discrete stacking sequence optimization of rectangular plates subjected to buckling and FPF constraints, *J. Theor. Appl. Mech.*, 2016, 54, 423–436.
- [256] Autio M., Optimization of coupled thermal-structural problems of laminated plates with lamination parameters, *Struct. Multidisc. Optim.*, 2001, 21, 40–51.
- [257] Liaw D.G., Nonlinear supersonic flutter of laminated composite plates under thermal loads, *Comput. Struct.*, 1997, 65, 733–740.
- [258] Vlasov V.Z., *General theory of shells and its applications in engineering*, NASA, Technical Translation TTF-99, Washington DC, 1964.

Streszczenie

W pracy analizowano zagadnienie optymalizacji w projektowaniu konstrukcji kompozytowych narażonych na utratę stateczności dynamicznej – zjawisko flutteru dla nadkrytycznych prędkości płynu. Analiza obejmuje dwa rodzaje konstrukcji: płyty prostokątne (wykonane z laminowanych wielowarstwowych materiałów kompozytowych oraz z porowatych funkcjonalnych materiałów gradientowych) i panele cylindryczne (laminowane wielowarstwowe materiały kompozytowe).

Szczegółowo omówiono metody rozwiązywania zagadnień utraty stateczności dynamicznej (analityczne i numeryczne). Przedyskutowano także zjawiska częstotliwości drgań swobodnych oraz maksymalizacji wartości ciśnienia aerodynamicznego w celu rozwiązania zadań optymalizacji. Przeprowadzona w pracy analiza dotyczy struktur z różnymi parametrami geometrycznymi, warunkami brzegowymi, orientacją laminatu oraz konfiguracją rozkładu porowatości w funkcjonalnych materiałach gradientowych. Zaproponowano i zastosowano z powodzeniem nową formę zmiennych decyzyjnych w przypadku laminatów o dyskretnej orientacji włókien.

Zadania optymalizacji rozwiązano zarówno analitycznie stosując pakiet symboliczny Mathematica (konstrukcja ze specyficznymi warunkami brzegowymi), jak i numerycznie przy użyciu metody elementów skończonych – pakiet NISA II (konstrukcja z dowolnymi warunkami brzegowymi).

Summary

OPTIMAL DESIGN OF STRUCTURES FOR DYNAMIC STABILITY MAXIMIZATION – SUPERSONIC FLUTTER PHENOMENON

In the present paper the optimal design of composite structures for dynamic stability maximization – supersonic flutter phenomenon is discussed. The analysis is carried out for two types of structures: rectangular plates (laminated multilayered composite materials and porous functionally graded materials) and cylindrical panels (laminated multilayered composite materials).

A special attention is focused on the methods of solution of dynamic stability problems (analytical and numerical methods). The phenomena of free vibrations frequency and aerodynamic pressure maximization were also discussed in order to solve optimization problems. The structures with different geometrical parameters, boundary conditions, stacking sequences and porosity distribution configuration for functionally graded materials are analyzed. For discrete fibre orientations a new form of design variables is proposed and successfully employed.

The optimization problems are solved analytically using the Mathematica symbolic package (structure with specific boundary conditions) and numerically using the finite element method – NISA II package (structure with any boundary conditions).